

DIPLOMARBEIT

„Implementierung von Defektkorrektur-Algorithmen
für Systeme steifer Differentialgleichungen“

ausgeführt am Institut für
Angewandte und Numerische Mathematik
der Technischen Universität Wien

unter Anleitung von
Univ.-Doz. Dr. Reinhard Frank
und
Univ.-Ass. Dr. Franz Macsek
als verantwortlich mitwirkendem Universitätsassistenten
durch

FASCHING KARL EUGEN

3384 GROSS SIERNING 66

Februar 1990
(überarbeitet 2013)

Kurzfassung

Diese Diplomarbeit beschäftigt sich mit der Lösung von Systemen steifer Differentialgleichungen mit Hilfe der Iterierten Defektkorrektur. Als Basisverfahren für die Defektkorrektur werden die implizite Trapezregel und die implizite Mittelpunktsregel verwendet. Die verschiedenen Varianten der Defektkorrektur mit den beiden Basisverfahren sollen experimentell erprobt und gegenübergestellt werden. Da bei einigen Differentialgleichungssystemen eine Interpolation von nur jedem zweiten Punkt sinnvoll erscheint, wurde auch damit experimentiert. Derartige Verfahren sollen jenen Verfahren gegenübergestellt werden, wo jeder Punkt interpoliert wurde. Der letzte Punkt, der in der Diplomarbeit behandelt wird, ist die Frage der Interpolation über einen Schrittweitenwechsel. Es wird anhand von Experimenten gezeigt, daß diese schon theoretisch als sinnlos erkannte Vorgangsweise auch praktisch keine besseren Ergebnisse liefert als die Interpolation auf einem äquidistanten Gitter.

Es ergibt sich somit die folgende Struktur der Diplomarbeit: Zuerst werden das Prinzip der Iterierten Defektkorrektur, deren verschiedene durchgeführten Varianten und wichtige Grundlagen der Implementierung beschrieben; danach werden die Ergebnisse der Experimente mit den verwendeten Differentialgleichungssystemen angeführt und Schlußfolgerungen daraus gezogen.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Verwendete Defektkorrektur-Algorithmen	3
2.1. Idee der Iterierten Defektkorrektur (IDeC)	3
2.2. Verwendete Basisverfahren	5
2.2.1. Implizite Trapezregel (ITR)	5
2.2.2. Implizite Mittelpunktsregel (IMR)	5
2.3. Verbindungsstrategien	6
2.4. Arten der Interpolation	7
2.5. Schrittweitenwechsel	8
3. Wesentliche Grundlagen der Implementierung	9
3.1. Gewichtsmatrizen	9
3.2. Lösung der nichtlinearen Gleichungen	12
3.2.1. Jacobimatrix	12
3.2.2. Newton-Verfahren	12
3.2.3. Iterationsmatrizen	12
3.2.4. Startwert und Abbruchkriterium	14
3.3. IDeC-Schritte auf einem Interpolationsintervall	15
4. Durchgeführte Experimente	16
4.1. Testproblem 1 (Skalares Prothero-Robinson-Modellproblem)	17
4.1.1. Beschreibung von Testproblem 1	17
4.1.2. Experimente mit Testproblem 1	17
4.2. Testproblem 2	42
4.2.1. Beschreibung von Testproblem 2	42
4.2.2. Experimente mit Testproblem 2	43
4.3. Testproblem 3	55
4.3.1. Beschreibung von Testproblem 3	55
4.3.2. Experimente mit Testproblem 3	55
4.4. Testproblem 4	61
4.4.1. Beschreibung von Testproblem 4 (Liniger)	61
4.4.2. Experimente mit Testproblem 4	62
5. Zusammenfassung	73
5.1. Vergleich ITR — IMR	73
5.2. Vergleich der Interpolationsvarianten: Jeder Punkt — Jeder zweite Punkt	74
5.3. Interpolation über einen Schrittweitenwechsel	74
5.4. Vergleich der Verbindungsstrategien	75

1. Einleitung

Um eine Differentialgleichung numerisch zu lösen, kann man sich verschiedener Verfahren bedienen. Einfachere Algorithmen wie Eulerverfahren, Trapez- und Mittelpunktsregel, die nur von niedrigerer Ordnung sind, stehen auch Verfahren höherer Ordnung — und zwar i. a. Runge-Kutta-Verfahren, Mehrschrittverfahren und die Beschleunigten Algorithmen — gegenüber.

Wir wollen im folgenden immer Anfangswertprobleme (AWPe) für Systeme von n gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\begin{aligned}y'(t) &= f(t, y(t)), & t \in [0, T] \\y(0) &= y_0\end{aligned}\tag{1.1}$$

betrachten. So ein Gleichungssystem wird in einem Punkt (\hat{t}, \hat{y}) als *steif* bezeichnet, falls die Jacobi-Matrix $f_y(\hat{t}, \hat{y})$ zumindest einen Eigenwert λ_i mit $\Re(\lambda_i) \ll 0$ besitzt. Betragsgroße Eigenwerte in der negativen komplexen Halbebene beeinträchtigen die Stabilität der Differentialgleichung (1.1) nicht, sie „verursachen“ aber große Lipschitzkonstanten der rechten Seite $f(t, y)$ der Differentialgleichung. Da die „klassischen“ Fehlerschranken für die numerischen Verfahren immer (i. a. in exponentieller Weise) von der Lipschitzkonstanten abhängen, „explodieren“ diese Fehlerschranken.

Die numerische Lösung steifer Differentialgleichungen kann trotzdem in stabiler und effizienter Weise erfolgen. Die Analyse von Verfahren, die sich für solche Situationen gut eignen, beruht auf der *einseitigen* Lipschitzkonstanten. (Die dementsprechenden Fehlerschätzungen werden als B-Konvergenz-Schranken bezeichnet.) Ganz allgemein stellt sich heraus, daß aus Stabilitätsgründen nur *implizite* Einschritt bzw. Mehrschrittverfahren in Frage kommen. Als die einfachsten Verfahren sind die *implizite Euler-, Trapez- und Mittelpunktsregel* zu erwähnen. Um den Nachteil der niedrigen Konvergenzordnung dieser einfachsten Verfahren aufzuwiegen, wendet man auf diese Verfahren oft sogenannte „Beschleunigungstechniken“ an.

Das Prinzip der Beschleunigten Algorithmen besteht darin, zuerst mit einem einfachen Verfahren, dem sogenannten Basisverfahren, eine Näherung niedriger Ordnung zu berechnen. Aus dieser Startnäherung werden durch iterative Verbesserung Näherungslösungen höherer Ordnung berechnet. Verfahren, die nach dieser Methode arbeiten, sind z. B. die *Extrapolationsverfahren*, die *Iterated Deferred Correction* (IDC) und die *Iterierte Defektkorrektur* (IDeC).

In dieser Diplomarbeit sollen Defektkorrekturalgorithmen, basierend auf der impliziten Mittelpunktsregel und der impliziten Trapezregel, experimentell erprobt und gegenübergestellt werden. Dabei war besonders das Konvergenzverhalten (Ordnungen der einzelnen IDeC-Schritte) für die Variante basierend auf der Trapezregel von Interesse, da — im Gegensatz zu den IDeC-Algorithmen mit der Mittelpunktsregel als Basisverfahren — für diesen Algorithmus keine B-Konvergenzresultate bekannt sind.

Schwerpunkte der numerischen Experimente waren:

- (i) Fragen der Schrittweitensteuerung; dabei insbesondere die Frage, ob die in den IDeC-Algorithmen auftretenden Interpolationspolynome über einen Schrittwei-

tenwechsel hinweg aufgebaut werden können, was aus theoretischen Überlegungen heraus wenig zielführend erschien (vgl. 2.5 und 5.3.).

- (ii) die Gegenüberstellung von IDeC-Varianten, bei denen die Interpolationspolynome an *jedem* Gitterpunkt interpolieren, jenen IDeC-Algorithmen, bei denen nur an *jedem zweiten* Punkt interpoliert wird.

Der theoretische Hintergrund für diese Fragestellungen besteht in den folgenden Punkten:

- a) Wenn man nur jeden zweiten Punkte interpoliert und über einen Schrittweitenwechsel *nicht* interpolieren will, ergeben sich relativ lange Intervalle mit konstanter Schrittweite, d. h. man hat eine geringere Flexibilität der Gitter, was gegen die Interpolation basierend an jedem zweiten Punkt spricht.
- b) Die Trapezregel und die Mittelpunktsregel produzieren in den steifen Komponenten Näherungswerte, die um die Lösung oszillieren. Da die Approximationsqualität der Interpolation wesentlich durch die Glattheit der zu interpolierenden Daten bestimmt ist, spricht das für die Interpolation an jedem zweiten Punkt. Allerdings ist bei vielen Modellen das Fehlerniveau in den steifen Komponenten mit dem Faktor

$$\varepsilon = -\frac{1}{\Re(\lambda_i)} \quad (\lambda_i \dots \text{steifer Eigenwert})$$

versehen (wobei die Klasse der Probleme, wo dieser ε -Faktor auftritt, bei der Trapezregel umfassender erscheint), sodaß zu erwarten ist, daß der Gesamtfehlerverlauf eher von der nichtsteifen Komponente bestimmt wird und dann die Interpolation basierend auf jedem zweiten Punkt als überflüssig erscheint.

Die in b) andiskutierten Punkte sind theoretisch noch wenig untersucht, im besonderen die Frage, ob steife Komponenten, deren Fehlerniveau aufgrund des ε -Faktors sehr gut ist, im Falle der vollen Kopplung mit glatten Komponenten von geringem Einfluß auf den Gesamtfehler bleiben. Daher waren die entsprechenden Experimente besonders wichtig und aufschlußreich.

2. Verwendete Defektkorrektur-Algorithmen

2.1. Idee der Iterierten Defektkorrektur (IDeC)

Gegeben sei das AWP (1.1). Wir unterteilen vorerst das Intervall $[0, T]$ in N Teilintervalle $[T_{i-1}, T_i]$, $i = 1(1)N$, der Länge $H_i = T_i - T_{i-1}$. Auf einem Teilintervall $[T_{i-1}, T_i]$ definieren wir die Schrittweite

$$h := \frac{H_i}{m}, \quad m \in \mathbb{N} \dots \text{konstant} \quad (2.1)$$

und die Gitterpunkte

$$T_{i-1} = t_0 < \dots < t_j (:= T_{i-1} + jh) < \dots < t_m = T_i. \quad (2.2)$$

Wir berechnen auf dem Gitter (2.2) des 1. Teilintervalls $[0, T_1]$ die Startnaherungen $\eta^{[0]} := (\eta_0^{[0]}, \dots, \eta_m^{[0]})$ für das AWP (1.1), und zwar mit Hilfe des Basisverfahrens. Die berechneten Startnaherungen werden nun durch ein Polynom $P^{[0]}(t)$ vom Grad m interpoliert, d. h.

$$P^{[0]}(t_\nu) = \eta_\nu^{[0]}, \quad \nu = 0(1)m. \quad (2.3)$$

Wir konstruieren nun ein neues AWP, das sogenannte 1. Nachbarproblem, das $P^{[0]}(t)$ als exakte Lösung hat:

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) + P^{[0]'}(t) - f(t, P^{[0]}(t)), \\ y(t_0) &= y_0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Obwohl wir die exakte Lösung von (2.4) kennen, lösen wir (2.4) mit demselben Basisverfahren auf demselben Gitter, wie wir (1.1) gelöst haben und erhalten so die numerische Näherung $\pi^{[0]} := (\pi_0^{[0]}, \dots, \pi_m^{[0]})$. Wir verwenden nun $\pi_\nu^{[0]} - P^{[0]}(t_\nu) = \pi_\nu^{[0]} - \eta_\nu^{[0]}$ als Schätzungen für die unbekanntenen Diskretisierungsfehler $\eta_\nu^{[0]} - y(t_\nu)$ und ersetzen in der Identität

$$y(t_\nu) = \eta_\nu^{[0]} - (\eta_\nu^{[0]} - y(t_\nu)), \quad \nu = 0(1)m \quad (2.5)$$

die unbekanntenen Diskretisierungsfehler $\eta_\nu^{[0]} - y(t_\nu)$ durch die Schätzungen $\pi_\nu^{[0]} - \eta_\nu^{[0]}$. Als 1. verbesserte Näherungslösung nehmen wir

$$\eta_\nu^{[1]} := \eta_\nu^{[0]} - (\pi_\nu^{[0]} - \eta_\nu^{[0]}), \quad \nu = 0(1)m. \quad (2.6)$$

Diesen Algorithmus kann man iterativ fortsetzen: Man interpoliert $\eta^{[1]}$ mittels des Interpolationspolynoms $P^{[1]}(t)$ und stellt ein weiteres Nachbarproblem (analog zu (2.4)) auf, das $P^{[1]}(t)$ als exakte Lösung hat. Die numerische Lösung dieses Nachbarproblems sei $\pi^{[1]} := (\pi_0^{[1]}, \dots, \pi_m^{[1]})$. Ersetzt man die unbekanntenen Diskretisierungsfehler in (2.5)

durch $\pi_\nu^{[1]} - P^{[1]}(t_\nu) = \pi_\nu^{[1]} - \eta_\nu^{[1]}$, so erhalten wir eine Formel zur weiteren Verbesserung von $\eta^{[1]}$:

$$\eta_\nu^{[2]} := \eta_\nu^{[0]} - (\pi_\nu^{[1]} - \eta_\nu^{[1]}), \quad \nu = 1(1)m. \quad (2.7)$$

Führt man auf diese Weise weiter fort, so erhält man die allgemeine Formel

$$\begin{aligned} \eta_\nu^{[i+1]} &= \eta_\nu^{[0]} - (\pi_\nu^{[i]} - P^{[i]}(t_\nu)) = \\ &= \eta_\nu^{[0]} - (\pi_\nu^{[i]} - \eta_\nu^{[i]}), \quad i = 0(1)i_{\max}, \quad \nu = 0(1)m, \end{aligned} \quad (2.8)$$

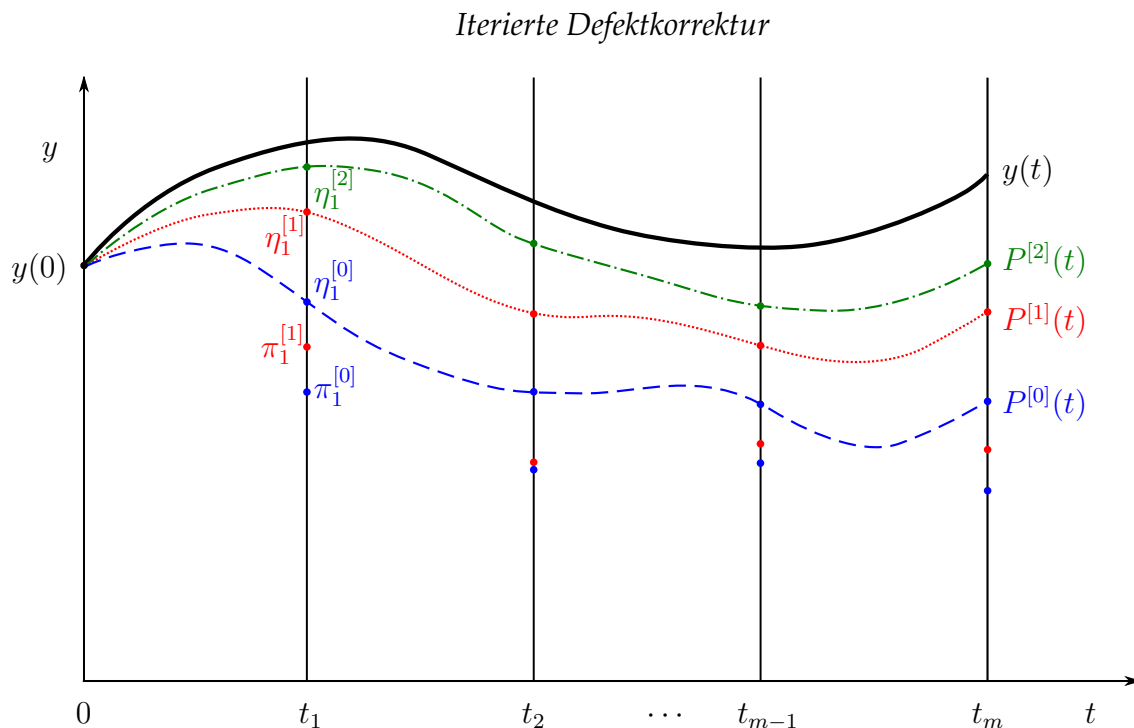


Abb. 1

wobei $P^{[i]}(t)$ das Interpolationspolynom für $\eta^{[i]}$ ist, d. h.

$$P^{[i]}(t_\nu) = \eta_\nu^{[i]}, \quad \nu = 0(1)m \quad (2.9)$$

und $\pi^{[i]}$ die numerische Lösung des i -ten Nachbarproblems

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) + P^{[i]'}(t) - f(t, P^{[i]}(t)), \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

ist.

2.2. Verwendete Basisverfahren

In der vorliegenden Arbeit werden die implizite Trapezregel und die implizite Mittelpunktsregel als Basisverfahren für die Defektkorrektur eingesetzt.

2.2.1. Implizite Trapezregel (ITR)

Die ITR, angewendet auf das Originalproblem (OP) (1.1) auf dem Gitter (2.2) des 1. Teilintervalls $[0, T_1]$ ergibt:

$$\begin{aligned}\eta_{\nu-1}^{[0]} &= \eta_{\nu}^{[0]} + \frac{h}{2} \left[f(t_{\nu}, \eta_{\nu}^{[0]}) + f(t_{\nu+1}, \eta_{\nu+1}^{[0]}) \right], & \nu &= 0(1)m, \\ \eta_0^{[0]} &= y_0.\end{aligned}\quad (2.11)$$

Ersetzen wir in (2.11) $f(t, y)$ durch $f(t, y) + P^{[i]'}(t) - f(t, P^{[i]}(t))$ und $\eta^{[0]}$ durch $\pi^{[i]}$, so erhalten wir die (nichtlinearen) Gleichungen für das i -te Nachbarproblem der ITR:

$$\begin{aligned}\pi_{\nu+1}^{[i]} &= \pi_{\nu}^{[i]} + \frac{h}{2} \left[f(t_{\nu}, \pi_{\nu}^{[i]}) + P^{[i]'}(t_{\nu}) - f(t_{\nu}, P^{[i]}(t_{\nu})) + \right. \\ &\quad \left. + f(t_{\nu+1}, \pi_{\nu+1}^{[i]}) + P^{[i]'}(t_{\nu+1}) - f(t_{\nu+1}, P^{[i]}(t_{\nu+1})) \right] = \\ &= \pi_{\nu}^{[i]} + \frac{h}{2} \left[f(t_{\nu}, \pi_{\nu}^{[i]}) + P^{[i]'}(t_{\nu}) - f(t_{\nu}, \eta_{\nu}^{[i]}) + \right. \\ &\quad \left. + f(t_{\nu+1}, \pi_{\nu+1}^{[i]}) + P^{[i]'}(t_{\nu+1}) - f(t_{\nu+1}, \eta_{\nu+1}^{[i]}) \right], \\ \nu &= 0(1)m - 1, & i &= 1(1)i_{\max}, \\ \pi_0^{[i]} &= y_0.\end{aligned}\quad (2.12)$$

2.2.2. Implizite Mittelpunktsregel (IMR)

Die IMR, angewendet auf das OP (1.1) auf dem Gitter (2.2) des 1. Teilintervalls $[0, T_1]$, ergibt:

$$\begin{aligned}\eta_{\nu+1}^{[0]} &= \eta_{\nu} + hf \left(\frac{t_{\nu} + t_{\nu+1}}{2}, \frac{\eta_{\nu}^{[0]} + \eta_{\nu+1}^{[0]}}{2} \right), & \nu &= 0(1)m - 1, \\ \eta_0^{[0]} &= y_0.\end{aligned}\quad (2.13)$$

Führen wir in (2.13) wieder die Ersetzungen wie in 2.2.1 durch, so erhalten wir die (nichtlinearen) Gleichungen für das i -te Nachbarproblem der IMR:

$$\pi_{\nu+1}^{[i]} = \pi_{\nu}^{[i]} + h \left[f \left(\frac{t_{\nu} + t_{\nu+1}}{2}, \frac{\pi_{\nu}^{[i]} + \pi_{\nu+1}^{[i]}}{2} \right) + P^{[i]'} \left(\frac{t_{\nu} + t_{\nu+1}}{2} \right) - f \left(\frac{t_{\nu} + t_{\nu+1}}{2}, P^{[i]} \left(\frac{t_{\nu} + t_{\nu+1}}{2} \right) \right) \right], \quad (2.14)$$

$$\nu = 0(1)m - 1, \quad i = 1(1)i_{\max},$$

$$\pi_0^{[i]} = y_0.$$

2.3. Verbindungsstrategien

Angenommen, wir haben auf dem Intervall $[0, T_1]$ i_{\max} Defektkorrekturschritte ausgeführt. Es stellt sich nun die Frage, wie wir die Startwerte $s, s^{[0]}, s^{[1]}, \dots, s^{[i_{\max}-1]}$ des OPs und der NPe auf dem zweiten Teilintervall $[T_1, T_2]$ bestimmen, durch die wir y_0 in den Gleichungen (2.11), (2.12), (2.13) und (2.14) ersetzen. Dazu haben wir zwei Möglichkeiten:

a) Lokale Verbindungsstrategie (LVS)

$$\begin{aligned} s &:= \eta_m^{[i_{\max}]}, \\ s^{[i]} &:= \eta_m^{[i_{\max}]}, \quad i = 0(1)i_{\max} - 1, \end{aligned} \quad (2.15)$$

b) Globale Verbindungsstrategie (GVS)

$$\begin{aligned} s &:= \eta_m^{[0]}, \\ s^{[i]} &:= \pi_m^{[i]}, \quad i = 0(1)i_{\max} - 1. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Die Startwerte für die weiteren Teilintervalle können auf dieselbe Art durch eine der beiden Verbindungsstrategien aus dem vorhergehenden Teilintervall bestimmt werden.

Bestimmen wir die Startwerte an den einzelnen Teilintervallen jeweils durch die LVS (für 2 IDeC-Schritte siehe *Abb. 2*) und betrachten nur die Endstellen T_0, \dots, T_N der Teilintervalle, so können wir diese Variante der IDeC auch als Einschrittverfahren höherer Ordnung betrachten.

Falls wir die Startwerte der Teilintervalle durch die GVS bestimmen (für 2 IDeC-Schritte siehe *Abb. 3*), so können wir diese IDeC-Variante auch als IDeC-Verfahren über das gesamte Intervall $[0, T]$ auffassen, wobei die Daten auf dem Gesamtintervall stückweise durch Polynome auf den einzelnen Teilintervallen interpoliert werden.

Lokale Verbindungsstrategie

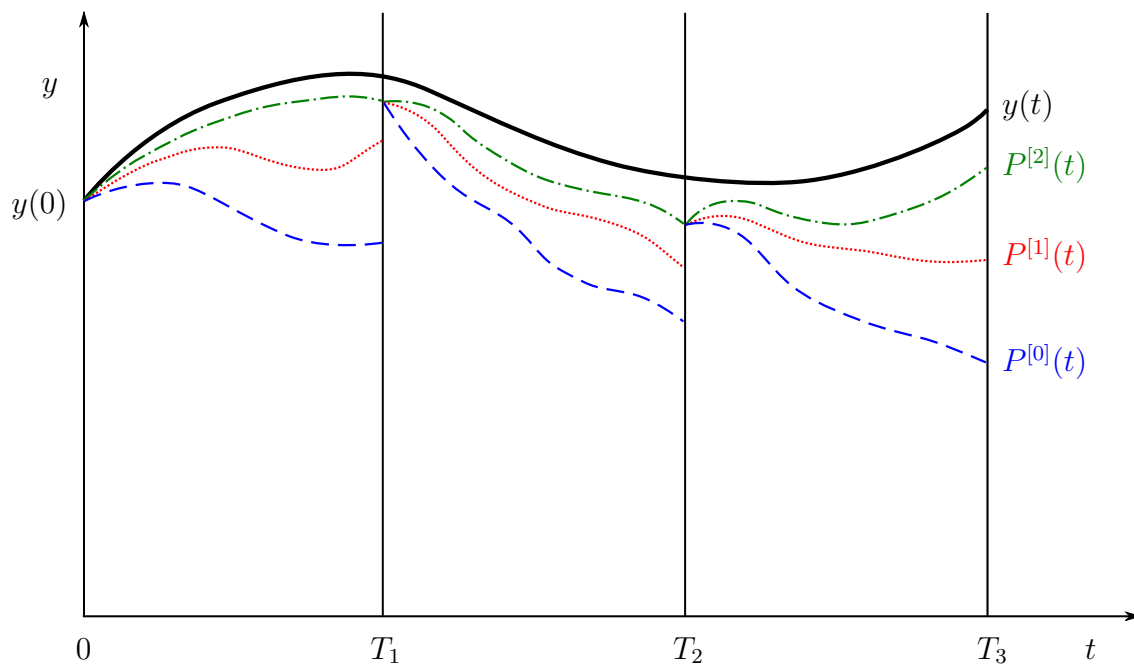


Abb. 2

2.4. Arten der Interpolation

Wenn man die ITR und die IMR auf skalare steife Modelle mit einem steifen Eigenwert $\lambda \ll 0$ (wie z. B. die Testgleichung von Prothero-Robinson) anwendet, ergibt sich ein oszillierender Fehlerverlauf des globalen Diskretisierungsfehlers, wobei aber in vielen Fällen der Fehler noch mit dem Faktor $\epsilon = -\frac{1}{\lambda}$ gedämpft ist. Da andererseits die Ordnungen der einzelnen IDeC-Schritte nur dann sichergestellt sind, falls die der Interpolation zugrunde liegenden Daten „von glatten Funktionen stammen“, d. h. durch Reduktion (Diskretisierung) einer glatten Funktion (mit moderaten Ableitungen) auf das Gitter der Interpolationsknoten gewonnen werden, liegt es nahe, auch an Interpolationsmechanismen zu denken, bei denen nur an jedem zweiten Gitterpunkt interpoliert wird. Es wurden daher beide Arten der Interpolation — „Interpolation an jedem Gitterpunkt“ und „Interpolation an jedem zweiten Gitterpunkt“ — realisiert.

Wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, spricht gegen die Interpolation an jedem zweiten Gitterpunkt die geringere Flexibilität bei der Schrittweitensteuerung; weiters wird in jenen Fällen, wo der oszillierende Fehlerverlauf in den steifen Komponenten mit ϵ gedämpft ist und daher die von den nichtsteifen Komponenten herrührenden Fehleranteile — die natürlich nicht oszillieren — dominieren, die Interpolation an jedem zweiten Gitterpunkt gar nicht notwendig sein. Da all diese Fragen theoretisch wenig abgeklärt sind, waren die Ergebnisse der entsprechenden numerischen Experimente (Gegenüberstellung der beiden Interpolationsarten) besonders interessant.

Globale Verbindungsstrategie

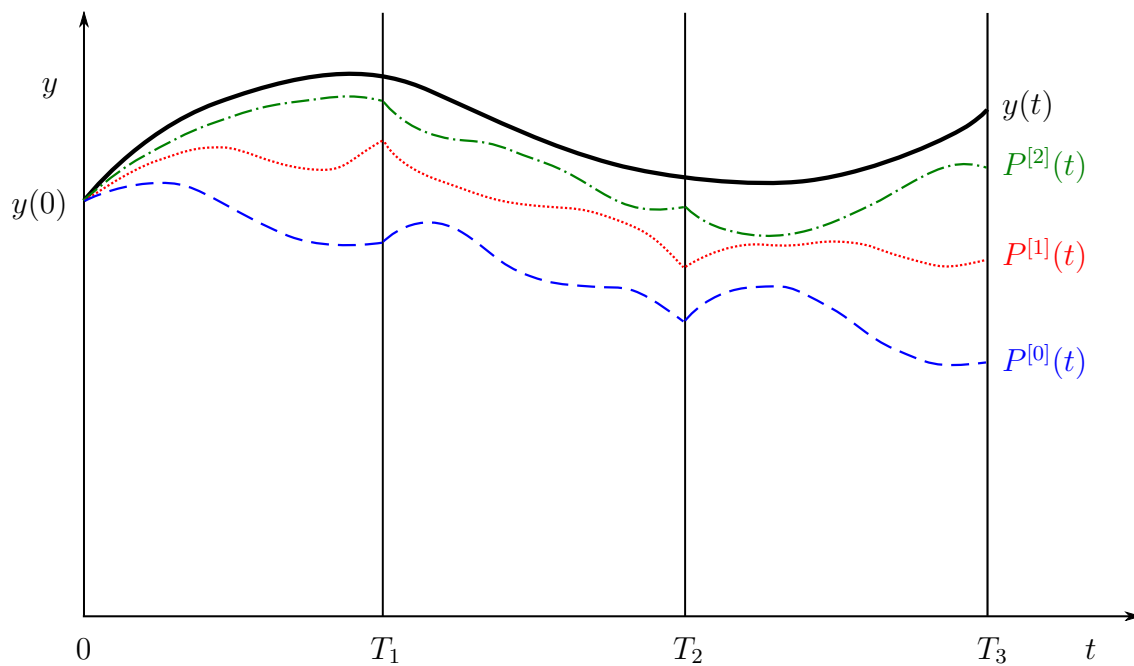


Abb. 3

2.5. Schrittweitenwechsel

Es wurden Experimente durchgeführt, über einen Schrittweitenwechsel zu interpolieren. Dazu wurde z. B. das Intervall $[T_{i-1}, T_i]$ entsprechend dem Verhältnis der beiden Schrittweiten h und \bar{h} in zwei Teilintervalle $[T_{i-1}, \bar{T}]$ und $[\bar{T}, T_i]$ zerlegt. Beide Teilintervalle wurden in $\frac{m}{2}$ (m muß dabei gerade sein) äquidistante Teilintervalle der Länge h bzw. \bar{h} geteilt. Die auf diese Weise ermittelten Stützstellen auf dem Intervall $[T_{i-1}, T_i]$ wurden jetzt interpoliert. Asymptotische Überlegungen zeigen, daß eine derartige Vorgangsweise nicht sinnvoll ist. Die Experimente bestätigen die Theorie (siehe (5.3.)). Auch die praktische Realisierung (Berechnung der Gewichtsmatrizen - vgl. Beginn von Kapitel 3 — ist sehr ineffizient. (Mit a-priori berechneten Gewichtsmatrizen kann man natürlich nur bei festen Schrittweitenverhältnissen $h : \bar{h}$ arbeiten.) Man sollte es daher vermeiden, das Interpolationsintervall über einen Schrittweitenwechsel zu legen.

3. Wesentliche Grundlagen der Implementierung

3.1. Gewichtsmatrizen

Um die Gleichungen (2.12) und (2.14) zu lösen, müssen wir noch die Werte von $P^{[i]}(t_\nu)$ und $P^{[i]'}$, $\nu = 0(1)m$, bzw. $P^{[i]}(\frac{t_{\nu-1}+t_\nu}{2})$ und $P^{[i]'}$ ($\frac{t_{\nu-1}+t_\nu}{2}$), $\nu = 1(1)m$, ermitteln. Da $P^{[i]}$ das Interpolationspolynom der $\eta_\nu^{[i]}$ ist, brauchen wir $P^{[i]}(t_\nu)$ nicht mehr zu ermitteln. Für die Effizienz des Verfahrens ist es wichtig, die Werte für $P^{[i]}$ und $P^{[i]'}$ mit geringem Aufwand zu berechnen. Dazu geht man von der Darstellung des Interpolationspolynoms nach Lagrange aus:

$$P^{[i]}(t) = \sum_{\nu=0}^m \eta_\nu^{[i]} L_\nu(t) \quad \text{mit} \quad (3.1)$$

$$L_\nu(t) = \prod_{\substack{\mu=0 \\ \mu \neq \nu}}^m \frac{t - t_\mu}{t_\nu - t_\mu}, \quad \nu = 0(1)m.$$

Durch Differentiation von (3.1) erhalten wir

$$P^{[i]'} = \sum_{\nu=0}^m \eta_\nu^{[i]} L_\nu'(t) \quad \text{mit} \quad (3.2)$$

$$L_\nu'(t) = \sum_{\substack{\lambda=0 \\ \lambda \neq \nu}}^m \frac{1}{t_\nu - t_\lambda} \prod_{\substack{\mu=0 \\ \mu \neq \nu, \lambda}}^m \frac{t - t_\mu}{t_\nu - t_\mu}, \quad \nu = 0(1)m.$$

Die Berechnung der Größen $P^{[i]}(\frac{t_{\nu-1}+t_\nu}{2})$ und $P^{[i]'}$ ($\frac{t_{\nu-1}+t_\nu}{2}$) bzw. $P^{[i]'}(t_\nu)$ als gewichtete Summen der $\eta_\nu^{[i]}$ erfolgt nun einfach mit Hilfe von entsprechenden Gewichtsmatrizen, die natürlich dem IDEC-Code als „universelle Konstanten“ zur Verfügung stehen und nicht etwa bei jedem Aufruf des IDEC-Programms zur Lösung eines speziellen Differentialgleichungssystems berechnet werden müssen. Berechnet man z. B. die Größen $P^{[i]}(\frac{t_{\rho-1}+t_\rho}{2})$, $\rho = 1(1)m$, aufgrund von (3.1), so erhält man

$$P^{[i]}(\frac{t_{\rho-1}+t_\rho}{2}) = \sum_{\nu=0}^m \eta_\nu^{[i]} L_\nu(\frac{t_{\rho-1}+t_\rho}{2}) \quad (3.3)$$

mit den Gewichten

$$L_{\nu,\rho} \equiv L_\nu(\frac{t_{\rho-1}+t_\rho}{2}) = \prod_{\substack{\mu=0 \\ \mu \neq \nu}}^m \frac{\frac{t_{\rho-1}+t_\rho}{2} - t_\mu}{t_\nu - t_\mu}, \quad (3.4)$$

wobei die Gewichte der $L_{\nu,\rho}$

- (i) von der Lage von t_0 unabhängig sind, da der Ausdruck für die $L_{\nu,\rho}$ nur von der Differenz $\frac{t_{\rho-1}+t_\rho}{2} - t_\nu$ bzw. $t_\nu - t_\mu$ abhängt, was bedeutet, daß die Gewichte für jedes Teilintervall $[T_{i-1}, T_i]$ gleich sind,
- (ii) von $h = t_\nu - t_{\nu-1}$ unabhängig sind, da im Zähler und Nenner von

$$\prod_{\substack{\mu=0 \\ \mu \neq \nu}}^m \frac{\frac{t_{\rho-1}+t_\rho}{2} - t_\mu}{t_\nu - t_\mu}$$

gleich viele Faktoren stehen, sodaß bei einer Änderung von h die Größen $L_{\nu,\rho}$ unverändert bleiben.

Bei den Gewichten für $P^{[i]'}(t_\rho)$ bzw. $P^{[i]'}\left(\frac{t_{\rho-1}+t_\rho}{2}\right)$ ist zu beachten, daß (vgl. (3.2)) $L'_\nu(t)$ eine Summe von Größen der Form

$$\frac{1}{t_\nu - t_\lambda} \prod_{\substack{\mu=0 \\ \mu \neq \nu, \lambda}}^m \frac{t - t_\mu}{t_\nu - t_\mu}$$

ist, bei denen im Nenner ein Faktor mehr steht als im Zähler. Berechnet man die Gewichte daher zunächst bezüglich des Stützstellenabstandes $t_\nu - t_{\nu-1} = 1$, müssen die so berechneten Gewichte beim Übergang zu einem anderen Gitterabstand $t_\nu - t_{\nu-1} = h$ mit dem Faktor $\frac{1}{h}$ multipliziert werden. Die Gewichte für den Stützstellenabstand $t_\nu - t_{\nu-1} = 1$ können wieder dem IDeC-Programm als „universelle Konstante“ zur Verfügung gestellt werden.

Wie sich nach einiger Rechnung ergibt, lauten die Gewichtsmatrizen konkret wie folgt:

1) Berechnung von $P^{[i]}\left(\frac{t_{\rho-1}+t_\rho}{2}\right)$, $\rho = 1(1)m$:

$$P^{[i]}\left(\frac{t_{\rho-1}+t_\rho}{2}\right) = \sum_{\nu=0}^m \eta_\nu^{[i]} L_{\nu,\rho}, \quad \rho = 1(1)m$$

$$L_{\nu,\rho} := \frac{\binom{m-\rho+\frac{1}{2}}{m} \left(\rho - \frac{1}{2}\right) \binom{\nu-m-1}{\nu}}{\rho - \frac{1}{2} - \nu}, \quad (3.5)$$

$$\rho = 1(1)m, \quad \nu = 0(1)m.$$

2) Berechnung von $P^{[i]'}\left(\frac{t_{\rho-1}+t_\rho}{2}\right)$, $\rho = 1(1)m$:

$$P^{[i]'}\left(\frac{t_{\rho-1}+t_\rho}{2}\right) = \sum_{\nu=0}^m \eta_\nu^{[i]} G_{\nu,\rho}, \quad \rho = 1(1)m$$

$$G_{\nu,\rho} := \frac{1}{h} \left[\underbrace{\frac{\binom{m-\rho-\frac{1}{2}}{m} \left(\rho - \frac{1}{2}\right) \binom{\nu-m-1}{\nu}}{\left(\rho - \frac{1}{2} - \nu\right)} \sum_{\substack{\lambda=0 \\ \lambda \neq \nu}}^m \frac{1}{\rho - \frac{1}{2} - \lambda}}_{\text{universelle Gewichte}} \right] \quad (3.6)$$

$$\rho = 1(1)m, \quad \nu = 0(1)m.$$

3) Berechnung von $P^{[i]'}(t_\rho)$, $\rho = 0(1)m$:

$$P^{[i]'}(t_\rho) = \sum_{\nu=0}^m \eta_\nu^{[i]} K_{\nu,\rho}, \quad \rho = 0(1)m$$

$$K_{\nu,\rho} := \begin{cases} \frac{1}{h} \left[\sum_{\substack{\lambda=0 \\ \lambda \neq \nu}}^m \frac{1}{\nu-\lambda} \right] & \text{für } \rho = \nu, \quad \rho, \nu = 0(1)m \\ \frac{1}{h} \left[\frac{\binom{\nu-m-1}{\nu}}{(\rho-\nu)\binom{\rho-m-1}{\rho}} \right] & \text{für } \rho \neq \nu, \quad \rho, \nu = 0(1)m. \end{cases} \quad (3.7)$$

Ein weiteres Problem tritt auf, falls wir nicht jeden, sondern jeden zweiten Punkt interpolieren. Wir betrachten dazu das Gitter

$$t_\nu = \nu, \quad \nu = 0(1)2m. \quad (3.8)$$

Die Werte der Interpolationspolynome stehen jedoch nur an den Gitterpunkten $t_{2\nu}$, $\nu = 0(1)m$ zur Verfügung. Für IDeC-Verfahren mit der ITR als Basisverfahren benötigen wir jedoch $P^{[i]}(t_\nu)$ und $P^{[i]'}(t_\nu)$, $\nu = 0(1)2m$, und für IDeC-Verfahren mit der IMR als Basisverfahren benötigen wir $P^{[i]}(t_\nu - \frac{1}{2})$ und $P^{[i]'}(t_\nu - \frac{1}{2})$, $\nu = 1(1)2m$. Wir können uns natürlich wieder geeignete Gewichtsmatrizen dafür berechnen, die jedoch etwas komplizierter zu ermitteln sind. Falls die Werte der Interpolationspolynome an allen Stellen des Gitters (3.8) bekannt sind, kommen wir jedoch auch mit den ursprünglich beschriebenen Gewichtsmatrizen aus: Wir teilen das Gitter (3.8) in zwei Teilgitter t_ν , $\nu = 0(1)m$ und t_ν , $\nu = m(1)2m$. Aufgrund der Eindeutigkeit der Interpolationspolynome können wir nun auf jedem der beiden Teilgitter die benötigten Daten der Interpolationspolynome durch gewöhnliche Multiplikation mit den entsprechenden Gewichtsmatrizen bestimmen. Es bleibt nur noch die Frage offen, wie wir die noch nicht bekannten Werte der Interpolationspolynome an den Stellen t_ν , $\nu = 1(2)2m - 1$ bestimmen. Dies können wir einfach durch die Multiplikation der Gewichtsmatrix zur Berechnung von $P^{[i]'}\left(\frac{t_{\rho-1}+t_\rho}{2}\right)$ mit den bekannten Werten der Interpolationspolynome durchführen.

Es wurden auch Untersuchungen gemacht, über einen Schrittweitenwechsel hinweg zu interpolieren (siehe (2.5)). Das Konzept der Gewichtsmatrizen kann man im Prinzip

auch hier verwenden, jedoch sind die Matrizen wesentlich komplizierter zu berechnen und sie hängen vom Schrittweitenverhältnis $\bar{h} : h$ ab, was bedeutet, daß man sie nicht a priori berechnen kann, sondern im IDeC-Programm selbst berechnen muß, nachdem die Schrittweitensteuerung eine neue Schrittweite \bar{h} als zweckdienlich erkannt hat.

3.2. Lösung der nichtlinearen Gleichungen

3.2.1. Jacobimatrix

Eine große Bedeutung bei der Lösung der nichtlinearen Gleichungssysteme (2.11), (2.12), (2.13) und (2.14), die bei der Lösung der Differentialgleichungssysteme auftreten, kommt der Jacobi-Matrix J von f

$$J = \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial f_k}{\partial y_l} \right)_{k,l=1(1)n} \quad (3.9)$$

zu (f_k und y_l bezeichnen die Vektorkomponenten von f bzw. y). J wurde als Unterprogramm zur Verfügung gestellt. Eine Näherung von J kann auch aus f numerisch ermittelt werden, was hier jedoch nicht durchgeführt wurde.

3.2.2. Newton-Verfahren

Wir betrachten nun ein Gleichungssystem n -ter Dimension

$$\gamma(\xi) = 0. \quad (3.10)$$

Um (3.10) zu lösen, wenden wir darauf das Newton-Verfahren

$$\frac{\partial \gamma}{\partial y}(\xi^{(k)}) (\xi^{(k+1)} - \xi^{(k)}) = -\gamma(\xi^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.11)$$

an. Die Matrix $\frac{\partial \gamma}{\partial y}$ wollen wir als Iterationsmatrix γ bezeichnen.

Wir wollen noch hervorheben, daß zur Lösung der nichtlinearen Gleichungssysteme ein modifiziertes Newton-Verfahren verwendet wird, bei dem die Iterationsmatrix während der einzelnen Newton-Schritte nicht verändert wird. Es wird daher nur eine Dreieckszerlegung der Iterationsmatrix (die nur an der Startstelle ausgewertet wird) benötigt.

3.2.3. Iterationsmatrizen

Bei der Lösung des AWP's (1.1) mit den IDeC-Verfahren basierend auf der ITR und der IMR treten nichtlineare Gleichungssysteme der Gestalt (2.11), (2.12), (2.13) und (2.14) auf. Wir wollen nun diese Gleichungen in die für das Newton-Verfahren geeignete Form bringen.

- Die Gleichung (2.11) für das OP bezüglich der ITR hat dann die Form

$$\gamma_T \left(\eta_{\nu+1}^{[0]} \right) := \eta_{\nu+1}^{[0]} - \eta_{\nu}^{[0]} - \frac{h}{2} \left[f \left(t_{\nu}, \eta_{\nu}^{[0]} \right) + f \left(t_{\nu+1}, \eta_{\nu+1}^{[0]} \right) \right] = 0, \quad (3.12)$$

$$\nu = 0(1)m - 1,$$

d. h. der unbekannte Vektor $y_{\nu+1} \equiv \eta_{\nu+1}^{[0]}$ muß aus dieser Gleichung berechnet werden. Die Iterationsmatrix für (3.12) hat die Gestalt

$$J_T^{[i]}(y_{\nu+1}) := \frac{\partial \gamma_T}{\partial y}(y_{\nu+1}) = I - \frac{h}{2} J(t_{\nu+1}, y_{\nu+1}), \quad \nu = 0(1)m - 1, \quad (3.13)$$

wird aber hier nur für den Startvektor $y_{\nu+2}^{\text{start}}$ des Newtonverfahrens ausgewertet.

- Die Gleichung (2.12) für die NPe beim IDEC-Algorithmus basierend auf der ITR schreiben wir folgendermaßen:

$$\gamma_T^{[i]} \left(\pi_{\nu+1}^{[i]} \right) := \pi_{\nu+1}^{[i]} - \pi_{\nu}^{[i]} - \frac{h}{2} \left[f \left(t_{\nu}, \pi_{\nu}^{[i]} \right) + P^{[i]'}(t_{\nu}) - f \left(t_{\nu}, \eta_{\nu}^{[i]} \right) + \right. \\ \left. + f \left(t_{\nu+1}, \pi_{\nu+1}^{[i]} \right) + P^{[i]'}(t_{\nu+1}) - f \left(t_{\nu+1}, \eta_{\nu+1}^{[i]} \right) \right] = 0, \quad (3.14)$$

$$\nu = 0(1)m - 1, \quad i = 0(1)i_{\max} - 1.$$

Die dazugehörige Iterationsmatrix hat offensichtlich wieder die Gestalt

$$J_T^{[i]} := \frac{\partial \gamma_T^{[i]}}{\partial y}(y_{\nu+1}) = I - \frac{h}{2} J(t_{\nu+1}, y_{\nu+1}), \quad (3.15)$$

$$\nu = 0(1)m - 1, \quad i = 0(1)i_{\max} - 1.$$

- Die Gleichung (2.13) für das OP bezüglich der IMR formen wir in die Gestalt

$$\gamma_M(\eta_{\nu+1}^{[0]}) := \eta_{\nu+1}^{[0]} - \eta_{\nu}^{[0]} - h f \left(\frac{t_{\nu} + t_{\nu+1}}{2}, \frac{\eta_{\nu}^{[0]} + \eta_{\nu+1}^{[0]}}{2} \right) = 0, \quad \nu = 0(1)m - 1 \quad (3.16)$$

um. Die dazugehörige Iterationsmatrix hat dann die Gestalt

$$J_M(y_{\nu+1}) := \frac{\partial \gamma_M}{\partial y}(y_{\nu+1}) = I - \frac{h}{2} J \left(\frac{t_{\nu} + t_{\nu+1}}{2}, \frac{\eta_{\nu}^{[0]} + y_{\nu+1}}{2} \right), \quad (3.17)$$

$$\nu = 0(1)m - 1.$$

- Die Gleichung (2.14) für die NPe beim IDEC-Algorithmus basierend auf der IMR schreibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
\gamma_M^{[i]}(\pi_{\nu+1}^{[i]}) &:= \pi_{\nu+1}^{[i]} - \pi_{\nu}^{[i]} - h \left[f \left(\frac{t_{\nu} + t_{\nu+1}}{2}, \frac{\pi_{\nu}^{[i]} + \pi_{\nu+1}^{[i]}}{2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + P^{[i]'} \left(\frac{t_{\nu} + t_{\nu+1}}{2} \right) - \right. \\
&\quad \left. - f \left(\frac{t_{\nu} + t_{\nu+1}}{2}, P^{[i]} \left(\frac{t_{\nu} + t_{\nu+1}}{2} \right) \right) \right] = 0, \\
\nu &= 0(1)m - 1, \quad i = 0(1)i_{\max} - 1.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Die dazugehörige Iterationsmatrix hat die Gestalt

$$\begin{aligned}
J_M^{[i]}(y_{\nu+1}) &:= \frac{\partial \gamma_M^{[i]}}{\partial y}(y_{\nu+1}) = I - \frac{h}{2} J \left(\frac{t_{\nu} + t_{\nu+1}}{2}, \frac{\pi_{\nu}^{[i]} + y_{\nu+1}}{2} \right), \\
\nu &= 0(1)m - 1, \quad i = 0(1)i_{\max} - 1.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Man erkennt, daß die Iterationsmatrizen in allen Fällen dieselbe Gestalt haben; sie werden jedoch i. a. an verschiedenen Stellen ausgewertet.

3.2.4. Startwert und Abbruchkriterium

Für die Newton-Iteration benötigen wir einen Startwert und ein Kriterium zum Abbruch der Iteration.

Als Startwert für die Berechnung von $\eta_{\nu+1}^{[0]}$ ($\pi_{\nu+1}^{[i]}$) mit dem Newton-Verfahren wurde $\eta_{\nu}^{[0]}$ ($\pi_{\nu}^{[i]}$) gewählt.

In das Kriterium für den Abbruch der Newton-Iteration gehen sowohl der absolute wie auch der relative Fehler ein. Die Newton-Iteration wird nach dem $(k+1)$ -ten Schritt (Berechnung von $\xi^{(k+1)}$, $k \in \mathbb{N}_0$) abgebrochen, falls

$$\begin{aligned}
\|r^{(k+1)}\|_{\max} &= \max_{1 \leq l \leq n} |r_l^{(k+1)}| < 1 \quad \text{ist, wobei} \\
r_l^{(k+1)} &:= \frac{\xi_l^{(k+1)} - \xi_l^{(k)}}{\vartheta_l} \quad \text{mit} \\
\vartheta_l &:= \varepsilon_{\text{rel}} |\xi_l^{(k+1)}| + \varepsilon_{\text{abs}}, \quad l = 1(1)n,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

mit geeigneten Toleranzen ε_{rel} und ε_{abs} . r_l , $\xi_l^{(k)}$ und ϑ_l bezeichnen dabei wieder die Vektorkomponenten von r , $\xi^{(k)}$ und ϑ .

3.3. IDeC-Schritte auf einem Interpolationsintervall

Da sich die Iterationsmatrizen J_T , $J_T^{[i]}$, J_M und $J_M^{[i]}$ bei den Gleichungen zur Bestimmung von $\eta_\nu^{[0]}$ ($\pi_\nu^{[i]}$) und denen zur Bestimmung von $\eta_{\nu+1}^{[0]}$ ($\pi_{\nu+1}^{[i]}$) in vielen Fällen nur geringfügig unterscheiden, ist es oft nicht notwendig, die Iterationsmatrizen für alle $\nu = 0(1)m - 1$ zu berechnen. Es ist aber auch oft nicht möglich, mit der erstmalig bestimmten Iterationsmatrix auf dem gesamten Interpolationsintervall die nichtlinearen Gleichungen zu lösen, da die Newton-Iterationen mit wachsendem ν ein immer schlechteres Konvergenzverhalten zeigen und daher immer mehr Newton-Schritte benötigt würden. Als Kriterium, wann die Iterationsmatrix neu zu berechnen ist, scheint die Anzahl der Newton-Schritte für die vorher zu lösende Gleichung sinnvoll: Die Iterationsmatrix wird für die Gleichung zur Lösung von $\eta_{\nu+1}^{[0]}$ ($\pi_{\nu+1}^{[i]}$) neu berechnet, falls zur Berechnung von $\eta_\nu^{[0]}$ ($\pi_\nu^{[i]}$) mehr als k_{jac} Iterationsschritte benötigt wurden.

Es kann auch passieren, daß das Newton-Verfahren nicht konvergiert. Falls nach k_{max} ($> k_{\text{jac}}$) Newton-Iterationen (3.20) noch immer nicht erfüllt ist, wird, falls die Iterationsmatrix noch nicht mit den neuen Werten berechnet wurde, diese neu berechnet und das Newton-Verfahren mit der neuen Iterationsmatrix wieder neu gestartet; andernfalls wird das Newton-Verfahren abgebrochen und die Gleichung als nicht lösbar eingestuft.

4. Durchgeführte Experimente

In Kapitel 2 wurden verschiedene Varianten zur Lösung von (steifen) Differentialgleichungssystemen mit Hilfe von IDeC-Verfahren besprochen. Um die Lösungsqualität der verschiedenen Verfahren bei der Integration von steifen Problemen zu testen, wurden 4 verschiedene Testbeispiele verwendet. Diese Beispiele sind jeweils so konstruiert, daß die exakte Lösung bekannt ist; der globale Diskretisierungsfehler kann deshalb genau berechnet werden. Bei skalaren Testproblemen wurde der vorzeichenbehaftete Diskretisierungsfehler angegeben. Bei mehrdimensionalen Testproblemen ist die euklidische Norm des Diskretisierungsfehlers angegeben. Die AWP_e werden, ausgehend von einem vorgegebenen Gitter, wiederholt auf immer feineren Gittern (durch Halbieren der Schrittweite) gelöst. Durch Vergleich der Norm des Diskretisierungsfehlers an einem Punkt t_i bezüglich einer Schrittweite h und der Schrittweite $\frac{h}{2}$ wurde die beobachtete Konvergenzordnung des Verfahrens an t_i ermittelt.

Beschreibung der Tabellen:

Es werden zwei Arten von Tabellen zu den durchgeführten Experimenten ausgegeben. Die Experimente wurden zuerst auf einem vorgegebenen Gitter durchgeführt. Sodann wurden die Experimente auf immer feineren Gittern (Halbieren der Schrittweite) durchgeführt. Der Unterschied zwischen beiden Tabellen ist, daß bei der ersten Art die Fehler und Ordnungen an allen Stützstellen, die beim Experiment auf dem größten Gitter auftraten, angegeben sind. Zwischen zwei Werten wurde ein Rufzeichen (!) ausgegeben, falls dazwischen das Ende eines Interpolationsintervalls liegt. Alle IDeC-Schritte wurden in einer einzigen Tabelle ausgegeben. Die verschiedenen Tabellen wurden aufgrund der Experimente auf den immer feineren Gittern ausgegeben. Für die Tabellen der zweiten Art wurden Experimente durchgeführt, bei denen ein Parameter variiert wurde und die restlichen festgehalten wurden. Die Tabellen zeigen die Ergebnisse an einem bestimmten Stützpunkt. Im Gegensatz zu den vorherigen Tabellen wurden bei diesen Tabellen nicht alle IDeC-Schritte zusammengestellt, sondern es wurde für jeden IDeC-Schritt eine eigene Tabelle angelegt. Die Experimente auf den immer feineren Gittern wurden in einer einzigen Tabelle ausgewiesen.

Bei den skalaren Modellen wurde der vorzeichenbehaftete Diskretisierungsfehler, sonst die euklidische Norm des Diskretisierungsfehlers, ausgegeben. Aufgrund des Fehlers auf einem Gitter und dem Fehler auf dem nächstfeineren Gitter wurden Ordnungen folgendermaßen berechnet:

$$\frac{\ln(e(2h)/e(h))}{\ln 2}. \quad (4.1)$$

Der Wert von M gibt den verwendeten Polynomgrad m an; H gibt den Wert der jeweiligen Schrittweite h an; bei der ersten Art der Tabellen geben die T -WERTE die verschiedenen Stützpunkte, die bei der Lösung auf dem größten Gitter auftreten, an. Bei den Tabellen, bei denen über einen Schrittweitenwechsel interpoliert wurde, gibt $H1$ bei der ersten Tabelle die Schrittweite h , $H2$ die Schrittweite \bar{h} an (vgl. 2.5). Bei der zweiten Tabelle (bei der ja wieder über äquidistante Gitter interpoliert wurde) sind $H1$ und $H2$ die Schrittweiten im jeweiligen Intervall.

Bei der zweiten Art der Tabellen stehen unter `FIXE PARAMETER` die Parameter, die nicht variiert wurden. `T` gibt den Stützpunkt t an, an dem die Tabellen erstellt wurden.

Die Experimente wurden in FORTRAN-77 an der CDC-CYBER 180/860 der TU Wien durchgeführt. (Rechnungen in double precision mit einer Mantissenlänge von 96 Bits, das entspricht etwa 28 Dezimalstellen.)

4.1. Testproblem 1 (Skalares Prothero-Robinson-Modellproblem)

4.1.1. Beschreibung von Testproblem 1

Die sogenannte „Prothero-Robinson-Modellgleichung“ ist ein skalares lineares AWP des Typs

$$\begin{aligned}y'(t) &= \lambda(y(t) - g(t)) + g'(t), & t \in [0, T], \\y(0) &= g(0)\end{aligned}\tag{4.2}$$

mit konstanter „Jacobi-Matrix“ $J \equiv \lambda$. Die exakte Lösung von (4.1) ist

$$y(t) = g(t), \quad t \in [0, T].$$

Für die Experimente wurde

$$g(t) = \sin(t + 0.7853981634)\tag{4.3}$$

gewählt. Für $\lambda \ll 0$ ist (4.2) steif; der Grad der Steifheit kann durch Verändern von λ variiert werden. Das besondere Merkmal von (4.2) besteht darin, daß die t -Ableitungen der rechten Seite $f(t, y(t)) = \lambda(y(t) - g(t)) + g'(t)$ für betragsgroßes λ sehr große Werte annehmen (außer an der wahren Lösung $y(t) = g(t)$). Anschaulich gesprochen liegt also ein stark variiertes Richtungsfeld vor; $y(t) = g(t)$ ist die einzige glatte Trajektorie. Diese Eigenschaft verursacht charakteristische Probleme bei der numerischen Integration; in vielen Fällen treten für $\lambda \ll 0$ Ordnungsreduktionen auf (im Vergleich mit der „klassischen“ Fehlerordnung). Die dabei beobachtbare Ordnung ist i. a. gerade die B-Konvergenzordnung.

4.1.2. Experimente mit Testproblem 1

Es wurden sowohl Experimente im nichtsteifen Bereich mit $\lambda = -1$ (Tabellen 1a – 4c) wie auch im mittelsteifen Bereich mit $\lambda = -10000$ (Tabellen 5a – 8c) und im stark steifen Bereich mit $\lambda = -10^{10}$ (Tabellen 9a – 12c) durchgeführt. Um gleiche Experimente zwischen IDeC-Varianten, bei denen die ITR als Basisverfahren verwendet wurde und IDeC-Varianten, bei denen die IMR als Basisverfahren gewählt wurde, leicht vergleichen zu können, wurde für die jeweils ersten beiden „Tabellenblöcke“ die ITR als Basisverfahren gewählt (z. B. 1a – 2c und 5a – 6c). Bei den restlichen Tabellen wurde die IMR als Basisverfahren gewählt. Aus demselben Grund wurden auch die Experimen-

te, bei denen jeder Punkt interpoliert wurde und jene, bei denen jeder zweite Punkte interpoliert wurde, ebenfalls nacheinander gereiht: Jene Experimente, bei denen jeder Punkt interpoliert wurde, sind in den Tabellen mit ungerader Nummer aufgelistet; die Tabellen mit der darauffolgenden geraden Nummer enthalten dasselbe Experiment, bei denen jedoch nur jeder zweite Punkt interpoliert wurde. Eine weitere Aufgabe, die in Kapitel 1 angerissen wurde, ist die Frage der Interpolation über einen Schrittweitenwechsel. Dazu wurden die Tabellen 13a – 18b ermittelt. Die Tabellen mit ungerader Nummer zeigen Experimente, bei denen die ITR als Basisverfahren gewählt wurde; bei den Tabellen mit gerader Nummer wurde die IMR als Basisverfahren gewählt. Die Tabellen 13a – 14b zeigen die Experimente mit $\lambda = -1$, bei denen jeder Punkt interpoliert wurde; bei den Tabellen 15a – 18b wurden die analogen Experimente für $\lambda = -10^{10}$ durchgeführt und die Tabellen 17a – 18b zeigen die Experimente für $\lambda = -10^{10}$, wobei jeder zweite Punkt interpoliert wurde.

a) Experimente mit $\lambda = -1$ (Klassischer Bereich)

In diesem nichtsteifen Fall war zu erwarten, daß die theoretisch vorhersagbaren klassischen Ordnungen deutlich zur Geltung kommen. Die Experimente erfolgten auf dem Interfall $[0, 1]$. Um nicht eine zu große Fülle von Daten zu bekommen, wurden hier und bei den folgenden Experimenten mit diesem Beispiel nur die Ergebnisse im Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ ausgegeben. Interpolation durch ein Polynom vom Grad 6; globale Verbindungsstrategie.

- Die Tabellen 1a – 1c zeigen die Ergebnisse des Experiments mit der ITR als Basisverfahren, wobei jeder Punkt interpoliert wurde. Es stellen sich die klassischen Ordnungen ein. (Ordnungsfolge 2-4-6; 6 ist die maximal erzielbare Ordnung bei Interpolation mit Polynomen vom Grad 6).

Die Tabellen 2a – 2c zeigen dasselbe Experiment, wobei aber nur jeder zweite Punkt interpoliert wurde. Auch hier zeigen sich die klassischen Ordnungen und ein ähnliches Fehlerniveau wie in 1a – 1c.

- Die Tabellen 3a – 3c bzw. 4a – 4c zeigen das Experiment mit der IMR als Basisverfahren, wobei jeder bzw. jeder zweite Punkt interpoliert wurde. Hier treten ebenfalls die klassischen Ordnungen auf.

Besonders in den Tabellen 1c, 2c, 3c und 4c wird deutlich, daß die Ordnungen der Defektkorrekturschritte nicht über den Grad der verwendeten Interpolationspolynome hinausgehen.

- Vergleich ITR — IMR

Vergleicht man die Tabellen 1a – 1c und 3a – 3c bzw. 2a – 2c und 4a – 4c, so erkennt man, daß die ITR beim „Basisschritt“ und beim ersten IDeC-Schritt das etwas bessere Fehlerniveau zeigt — bei den weiteren NPen gleicht sich dieser leichte Nachteil der IMR wieder weitgehend aus.

- Vergleich der Interpolationsvarianten: Jeder Punkt — Jeder zweite Punkt

Beim Vergleich der Tabellen 1a – 1c und 2a – 2c bzw. 3a – 3c und 4a – 4c muß man sich darüber im klaren sein, daß die Schrittweite bei Interpolation an jedem zweiten Punkt bei den entsprechenden Tabellen nur halb so groß ist wie bei der Interpolation an jedem Punkt — die Interpolationsknoten befinden sich jedoch an denselben Stellen. Will man die Ergebnisse für dieselbe Schrittweite

vergleichen (vgl. $-1.18E-09$ in Tabelle 1b und $-9.63E-10$ in Tabelle 2a beim ersten IDeC-Schritt beim Stützpunkt $t = 8.33E-02$).

Vergleicht man die Ergebnisse bei gleichen Stützstellen, so kann man feststellen, daß die Interpolation an jedem zweiten Punkt nicht besser als die bei jedem Punkt ist — bei den höheren IDeC-Schritten sind die Fehler sogar bei gleicher Interpolationsschrittweite im selben Größenbereich (vgl. $7.52E-12$ in Tabelle 1b und $3.03E-12$ in Tabelle 2b beim Stützpunkt $t = 0.25$ für den 3. IDeC-Schritt). Die Interpolation an jedem zweiten Punkt verursacht eine gewisse Inflexibilität bei der Schrittweitenwahl und ist daher im nichtsteifen Fall nicht zu befürworten.

T R A P E Z R E G E L
 G L O B A L E VERBINDUNGSSTRATEGIE J E D E R PUNKT WIRD INTERPOLIERT M = 6
 T-WERTE: 8.33E-02 1.67E-01 2.50E-10 3.33E-01 4-17E-01 5.00E-01

OHNE VERFEINERUNG (H = 8.33E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: 3.13E-05 5.72E-05 7.79E-05 9.36E-05 1.05E-04 1.11E-04
 1. DC-SCHRITT: -1.81E-08 -3.59E-08 -5.23E-08 -6.78E-08 -8.24E-08 -9.54E-08
 2. DC-SCHRITT: 5.69E-10 3.58E-10 3.82E-10 3.95E-10 2.08E-10 7.40E-10
 3. DC-SCHRITT: 5.64E-10 3.48E-10 3.68E-10 3.77E-10 1.87E-10 7.17E-10

Tabelle 1a

1. VERFEINERUNG (H = 4.17E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: 7.83E-06 1.43E-05 1.95E-05! 2.34E-05 2.61E-05 2.77E-05
 1. DC-SCHRITT: -1.18E-09 -2.28E-09 -3.29E-09! -4.25E-09 -5.16E-09 -6.01E-09
 2. DC-SCHRITT: 3.64E-12 4.28E-12 7.84E-12! 9.58E-12 9.38E-12 1.11E-11
 3. DC-SCHRITT: 3.52E-12 4.05E-12 7.52E-12! 9.24E-12 9.03E-12 1.07E-11
 O R D N U N G E N :
 BASISVERFAHREN: 2.00 2.00 2.00! 2.00 2.00 2.00
 1. DC-SCHRITT: 3.94 3.98 3.99! 3.99 4.00 3.99
 2. DC-SCHRITT: 7.29 6.39 5.61! 5.37 4.47 6.06
 3. DC-SCHRITT: 7.32 6.43 5.61! 5.35 4.37 6.06

Tabelle 1b

2. VERFEINERUNG (H = 2.08E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: 1.96E-06! 3.57E-06 4.86E-06! 5.84E-06! 6.53E-06 6.93E-06
 1. DC-SCHRITT: -7.40E-11! -1.42E-10 -2.06E-10! -2.66E-10! -3.23E-10 -3.77E-10
 2. DC-SCHRITT: 3.88E-14! 9.46E-14 1.21E-13! 1.38E-13! 1.65E-13 1.72E-13
 3. DC-SCHRITT: 3.66E-14! 9.08E-14 1.16E-13! 1.32E-13! 1.59E-13 1.66E-13
 O R D N U N G E N :
 BASISVERFAHREN: 2.00! 2.00 2.00! 2.00! 2.00 2.00
 1. DC-SCHRITT: 3.99! 4.00 4.00! 4.00! 4.00 4.00
 2. DC-SCHRITT: 6.55! 5.50 6.01! 6.12! 5.83 6.01
 3. DC-SCHRITT: 6.59! 5.48 6.01! 6.12! 5.83 6.02

Tabelle 1c

T R A P E Z R E G E L
 G L O B A L E VERBINDUNGSSTRATEGIE J E D E R 2 . PUNKT WIRD INTERPOLIERT M = 6
 T-WERTE: 4.17E-02 8.33E-02 1.25E-01 1.67E-01 2.08E-01 2.50E-01 2.92E-01
 3.33E-01 3.75E-01 4.17E-01 4.58E-01 5.00E-01

OHNE VERFEINERUNG (H = 4.17E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: 4.09E-06 7.83E-06 1.12E-05 1.43E-05 1.70E-05 1.95E-05 2.16E-05
 2.34E-05 2.49E-05 2.61E-05 2.71E-05 2.77E-05
 1. DC-SCHRITT: -1.80E-10 -9.63E-10 -1.60E-09 -2.10E-09 -2.60E-09 -3.14E-09 -3.66E-09
 -4.11E-09 -4.53E-09 -5.05E-09 -5.66E-09 -5.71E-09
 2. DC-SCHRITT: 6.51E-10 2.03E-10 5.45E-11 1.60E-10 2.20E-10 1.52E-10 8.45E-11
 1.44E-10 2.45E-10 1.08E-10 -2.99E-10 2.88E-10
 3. DC-SCHRITT: 8.90E-10 2.03E-10 -9.71E-12 1.59E-10 2.55E-10 1.52E-10 4.99E-11
 1.44E-10 3.05E-10 1.07E-10 -5.19E-10 2.87E-10

Tabelle 2a

1. VERFEINERUNG (H = 2.08E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: 1.02E-06 1.96E-06 2.81E-06 3.57E-06 4.26E-06 4.86E-06! 5.39E-06
 5.84E-06 6.22E-06 6.53E-06 6.76E-06 6.93E-06
 1. DC-SCHRITT: -3.57E-11 -7.23E-11 -1.07E-10 -1.41E-10 -1.74E-10 -2.03E-10! -2.32E-10
 -2.62E-10 -2.91E-10 -3.19E-10 -3.47E-10 -3.72E-10
 2. DC-SCHRITT: 1.91E-12 1.57E-12 1.56E-12 1.53E-12 1.23E-12 3.04E-12! 4.17E-12
 3.84E-12 3.71E-12 3.58E-12 3.28E-12 4.34E-12
 3. DC-SCHRITT: 1.91E-12 1.57E-12 1.55E-12 1.53E-12 1.22E-12 3.03E-12! 4.17E-12
 3.83E-12 3.70E-12 3.58E-12 3.27E-12 4.33E-12

O R D N U N G E N :
 BASISVERFAHREN: 2.00 2.00 2.00 2.00 2.00 2.00! 2.00
 2.00 2.00 2.00 2.00 2.00
 1. DC-SCHRITT: 2.34 3.74 3.90 3.90 3.90 3.95! 3.98
 3.97 3.96 3.98 4.03 3.94
 2. DC-SCHRITT: 8.42 7.01 5.13 6.70 7.49 5.64! 4.34
 5.23 6.04 4.91 6.51 6.05
 3. DC-SCHRITT: 8.87 7.01 2.64 6.70 7.71 5.65! 3.58
 5.23 6.36 4.90 7.31 6.05

Tabelle 2b

2. VERFEINERUNG (H = 1.04E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: 2.55E-07 4.89E-07 7.01E-07! 8.93E-07 1.06E-06 1.22E-06! 1.35E-06
 1.46E-06 1.56E-06! 1.63E-06 1.69E-06 1.73E-06
 1. DC-SCHRITT -2.34E-12 -4.61E-12 -6.78E-12! -8.87E-12 -1.09E-11 -1.29E-11! -1.48E-11
 -1.66E-11 -1.84E-11! -2.01E-11 -2.18E-11 -2.35E-11
 2. DC-SCHRITT 1.36E-14 1.38E-14 2.72E-14! 3.77E-14 3.68E-14 4.71E-14! 5.46E-14
 5.29E-14 6.03E-14! 6.49E-14 6.26E-14 6.72E-14
 3. DC-SCHRITT 1.36E-14 1.38E-14 2.71E-14! 3.76E-14 3.67E-14 4.70E-14! 5.45E-14
 5.28E-14 6.02E-14! 6.48E-14 6.26E-14 6.71E-14

O R D N U N G E N :
 BASISVERFAHREN: 2.00 2.00 2.00! 2.00 2.00 2.00 2.00! 2.00
 2.00 2.00! 2.00 2.00 2.00
 1. DC-SCHRITT 3.93 3.97 3.98! 3.99 3.99 3.98! 3.98
 3.98 3.99! 3.99 3.99 3.99
 2. DC-SCHRITT 7.13 6.83 5.84! 5.35 5.06 6.01! 6.26
 6.18 5.94! 5.79 5.71 6.01
 3. DC-SCHRITT 7.13 6.83 5.84! 5.35 5.06 6.01! 6.26
 6.18 5.94! 5.79 5.71 6.01

MITTELPUNKTSREGEL
 GLOBALE VERBINDUNGSSTRATEGIE JEDER PUNKT WIRD INTERPOLIERT M = 6
 T-WERTE: 8.33E-02 1.67E-01 2.50E-01 3.33E-01 4.17E-06 5.00E-01

OHNE VERFEINERUNG (H = 8.33E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: -6.68E-05 -1.30E-04 -1.91E-04 -2.48E-04 -3.01E-04 -3.50E-04
 1. DC-SCHRITT: 3.87E-08 7.69E-08 1.14E-07 1.50E-07 1.85E-07 2.17E-07
 2. DC-SCHRITT: -4.55E-10 -3.98E-10 -3.85E-10 -3.76E-10 -3.26E-10 -7.78E-10
 3. DC-SCHRITT: -4.43E-10 -3.74E-10 -3.49E-10 -3.27E-10 -2.64E-10 -7.03E-10

Tabelle 3a

1. VERFEINERUNG (H = 4.17E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: -1.67E-05 -3.26E-05 -4.77E-05!-6.19E-05 -7.52E-05 -8.74E-05
 1. DC-SCHRITT: 2.44E-09 4.82E-09 7.14E-09! 9.39E-09 1.16E-08 1.37E-08
 2. DC-SCHRITT: -3.95E-12 -3.92E-12 -7.90E-12!-1.00E-11 -9.56E-12 -1.17E-11
 3. DC-SCHRITT: -3.77E-12 -3.57E-12 -7.37E-12!-9.28E-12 -8.60E-12 -1.05E-11
 O R D N U N G E N :
 BASISVERFAHREN: 2.00 2.00 2.00! 2.00 2.00 2.00
 1. DC-SCHRITT: 3.99 4.00 4.00! 4.00 4.00 4.00
 2. DC-SCHRITT: 6.85 6.67 5.61! 5.23 5.09 6.06
 3. DC-SCHRITT: 6.88 6.71 5.56! 5.14 4.94 6.06

Tabelle 3b

2. VERFEINERUNG (H = 2.08E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: -4.17E-06!-8.15E-06 -1.19E-05!-1.55E-05!-1.88E-05 -2.19E-05
 1. DC-SCHRITT: 1.52E-10! 3.01E-10 4.47E-10! 5.87E-10! 7.23E-10 8.54E-10
 2. DC-SCHRITT: -3.52E-14!-9.67E-14 -1.22E-13!-1.39E-13!-1.72E-13 -1.81E-13
 3. DC-SCHRITT: -3.26E-14!-9.13E-14 -1.14E-13!-1.27E-13!-1.57E-13 -1.63E-13
 O R D N U N G E N :
 BASISVERFAHREN: 2.00! 2.00 2.00! 2.00! 2.00 2.00
 1. DC-SCHRITT: 4.00! 4.00 4.00! 4.00! 4.00 4.00
 2. DC-SCHRITT: 6.81! 5.34 6.01! 6.17! 5.80 6.01
 3. DC-SCHRITT: 6.86! 5.29 6.01! 6.19! 5.77 6.02

Tabelle 3c

MITTELPUNKTSREGEL
 GLOBALE VERBINDUNGSTRATEGIE JEDER 2. PUNKT WIRD INTERPOLIERT M = 6
 T-WERTE: 4.17E-02 8.33E-02 1.25E-01 1.67E-01 2.08E-01 2.50E-01 2.92E-01
 3.33E-01 3.75E-01 4.17E-01 4.58E-01 5.00E-01

OHNE VERFEINERUNG (H = 4.17E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: -8.44E-06 -1.67E-05 -2.47E-05 -3.26E-05 -4.03E-05 -4.77E-05 -5.49E-05
 -6.19E-05 -6.87E-05 -7.52E-05 -8.14E-05 -8.74E-05
 1. DC-SCHRITT: 1.38E-09 2.34E-09 3.48E-09 4.74E-09 5.95E-09 7.07E-09 8.17E-09
 9.32E-09 1.05E-08 1.15E-08 1.23E-08 1.35E-08
 2. DC-SCHRITT: 3.91E-10 -1.08E-10 -2.29E-10 -9.00E-11 -1.44E-11 -8.42E-11 -1.53E-10
 -7.95E-11 5.21E-11 -6.30E-11 -5.20E-10 -1.69E-10
 3. DC-SCHRITT: 6.30E-10 -1.08E-10 -2.93E-10 -8.96E-11 2.11E-11 -8.36E-11 -1.87E-10
 -7.88E-11 1.14E-10 -6.20E-11 -7.38E-10 -1.68E-10

Tabelle 4a

1. VERFEINERUNG (H = 2.08E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: -2.11E-06 -4.17E-06 -6.19E-06 -8.15E-06 -1.01E-05 -1.19E-05! -1.37E-05
 -1.55E-05 -1.72E-05 -1.88E-05 -2.04E-05 -2.19E-05
 1. DC-SCHRITT: 7.57E-11 1.52E-10 2.27E-10 3.01E-10 3.75E-10 4.45E-10! 5.15E-10
 5.85E-10 6.54E-10 7.21E-10 7.87E-10 8.51E-10
 2. DC-SCHRITT: -1.04E-12 -9.04E-13 -8.81E-13 -8.63E-13 -7.31E-13 -1.77E-12! -2.38E-12
 -2.23E-12 -2.15E-12 -2.07E-12 -1.93E-12 -2.53E-12
 3. DC-SCHRITT: -1.03E-12 -9.01E-13 -8.77E-13 -8.57E-13 -7.24E-13 -1.76E-12! -2.37E-12
 -2.21E-12 -2.13E-12 -2.06E-12 -1.91E-12 -2.51E-12

O R D N U N G E N :

BASISVERFAHREN: 2.00 2.00 2.00 2.00 2.00 2.00! 2.00
 2.00 2.00 2.00 2.00 2.00
 1. DC-SCHRITT: 4.19 3.95 3.94 3.98 3.99 3.99! 3.99
 3.99 4.00 4.00 3.97 3.99
 2. DC-SCHRITT: 8.56 6.90 8.02 6.70 4.30 5.57! 6.01
 5.16 4.60 4.93 8.08 6.06
 3. DC-SCHRITT: 9.25 6.90 8.38 6.71 4.86 5.57! 6.30
 5.15 5.74 4.91 8.60 6.06

Tabelle 4b

2. VERFEINERUNG (H = 1.04E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: -5.27E-07 -1.04E-06 -1.55E-06! -2.04E-06 -2.52E-06 -2.98E-06! -3.43E-06
 -3.87E-06 -4.29E-06! -4.70E-06 -5.09E-06 -5.46E-06
 1. DC-SCHRITT: 4.78E-12 9.25E-12 1.42E-11! 1.88E-11 2.34E-11 2.79E-11! 3.23E-11
 3.67E-11 4.10E-11! 4.52E-11 4.93E-11 5.33E-11
 2. DC-SCHRITT: -7.91E-15 -7.85E-15 -1.58E-14! -2.19E-14 -2.12E-14 -2.74E-14! -3.17E-14
 -3.06E-14 -3.50E-14! -3.78E-14 -3.64E-14 -3.91E-14
 3. DC-SCHRITT: -7.89E-15 -7.81E-15 -1.57E-14! -2.18E-14 -2.11E-14 -2.72E-14! -3.16E-14
 -3.05E-14 -3.48E-14! -3.75E-14 -3.61E-14 -3.88E-14

O R D N U N G E N :

BASISVERFAHREN: 2.00 2.00 2.00! 2.00 2.00 2.00! 2.00
 2.00 2.00! 2.00 2.00 2.00
 1. DC-SCHRITT: 3.98 3.99 4.00! 4.00 4.00 4.00! 4.00
 4.00 4.00! 4.00 4.00 4.00
 2. DC-SCHRITT: 7.03 6.85 5.80! 5.30 5.11 6.01! 6.23
 6.18 5.94! 5.78 5.73 6.02
 3. DC-SCHRITT: 7.04 6.85 5.80! 5.30 5.10 6.01! 6.23
 6.18 5.94! 5.78 5.72 6.02

Tabelle 4c

b) Experimente mit $\lambda = -10000$ (mittelsteifer Bereich)

Da insbesondere für „mittelsteife“ DGLen noch wenig theoretische Ergebnisse vorhanden sind, waren diese Experimente besonders interessant. Die DGL wurde wieder auf dem Intervall $[0, 1]$ gelöst. Die Interpolation erfolgte durch Polynome vom Grad 6 (d. h. 2 IDeC-Schritte sind sinnvoll). Es wurde durchwegs die globale Verbindungsstrategie benutzt.

Zum Begriff „mittelsteif“ sind einige Bemerkungen angebracht. In der Theorie der Diskretisierungsverfahren für steife Probleme spielt das Verhältnis der Schrittweite h zum „Steifheitsparameter“ λ eine wichtige Rolle. Das Verhalten im „stark steifen“ Fall, der qualitativ durch $\frac{1}{|\lambda|} \ll h$ charakterisiert ist, ist meist „regulärer“ (und theoretisch leichter beherrschbar) als im mittelsteifen Fall $\frac{1}{|\lambda|} \approx h$. So sind z. B. für die IDeC mit der IMR als Basisverfahren im stark steifen Fall (für die Variante mit der Interpolation an jedem zweiten Punkte) B-Konvergenzresultate bekannt, während der mittelsteife Fall leider nicht abgedeckt ist. (Dies ist Gegenstand der aktuellen Forschung und ist eine wichtige Motivation für unsere Experimente.) Der tiefere Grund dafür liegt darin, daß der dominante Fehlerterm bei der IMR eine oszillierende Komponente aufweist; im stark steifen Fall ist die Oszillation so „rein“, daß das Verhalten dem eines glatten Verlaufes entspricht, wenn man nur jeden zweiten Gitterpunkt betrachtet. Bei der ITR liegen die Verhältnisse ähnlich; allerdings ist das Fehlerniveau im skalaren Fall (und vermutlich auch bei gewissen nichtskalaren Problemklassen) um einen Faktor $\epsilon \approx \frac{1}{|\lambda|}$ besser als bei der IMR. Damit ist auch die Oszillation durch ϵ „gedämpft“, was erwarten läßt, daß die Variante mit Interpolation an jedem Gitterpunkt bei der ITR robuster sein sollte als bei der IMR. Bei den im folgenden beschriebenen Experimenten wurde h so gewählt, daß zunächst eine eher „stark steife“ Situation vorliegt; bei Verfeinerung des Gitters nähert man sich einer typischen „mittelsteifen“ Situation. Ein extrem steifer Fall wird in c) betrachtet.

- Die Tabellen 5a – 5c zeigen das Experiment mit der ITR als Basisverfahren, wobei *jeder* Punkt interpoliert wurde. In Tabelle 5a ist das oszillierende Verhalten des Fehlers beim Basisverfahren deutlich zu erkennen. Man beachte die sehr gute Approximationsqualität der ITR bereits auf dem größten Gitter. Man erkennt jedoch, daß schon das Basisverfahren keine regelmäßige Ordnung zeigt. Dieses unregelmäßige Verhalten der beobachteten Ordnungen läßt sich durch die Oszillation des Fehlers erklären. Darüber hinaus liefern die Defektkorrekturschritte keine bessere Approximation der exakten Lösung als das Basisverfahren — die Fehler werden bei Verfeinerung des Gitters sogar noch etwas größer. Dies zeigt deutlich den störenden Effekt der Oszillation im Fall der Interpolation an jedem Punkt.
- Die Tabellen 6a – 6c zeigen dasselbe Experiment, wobei jedoch nur jeder 2. Punkt interpoliert wurde. Anhand der Tabellen 6a und 6c ist erkennbar, daß die interpolierten (geraden) Stellen ein deutlich besseres Approximationsverhalten zeigen als die nicht interpolierten (ungeraden). Obwohl auch hier das Basisverfahren keine regelmäßigen Ordnungen zeigt, kann man bei den IDeC-Schritten eine Verbesserung der Fehler feststellen. Beim 2. IDeC-Schritt ist jedoch keine merkliche Verbesserung des Fehlerniveaus mehr festzustellen!

- Für die Tabellen 7a – 7c wurden die Experimente mit der IMR als Basisverfahren durchgeführt, wobei jeder Punkt interpoliert wurde. Es ist wiederum eine Oszillation des Basisverfahrens erkennbar. Die IDeC-Algorithmen mit der IMR als Basisverfahren reagieren offensichtlich viel sensibler auf Oszillationen als die ITR, denn es ist ein Totalversagen der IDeC festzustellen. Anstatt daß sich die Fehler bei den einzelnen IDeC-Schritten verringern, vergrößern sie sich sogar erheblich bei jedem IDeC-Schritt.
- Bei den Tabellen 8a – 8c sind Experimente mit der IMR als Basisverfahren angeführt, wobei jeder 2. Punkt interpoliert wurde. Anhand der Tabellen 8a und 8c erkennt man, daß nur an den Interpolationsknoten eine gute Näherung vorherrscht; an den restlichen Stellen fällt man wieder auf das Feherniveau des Basisverfahrens zurück! Besonders in Tabelle 8c erkennt man, daß die theoretischen Ordnungen langsam wiederhergestellt werden.

- Vergleich ITR — IMR

Wie bereits erwähnt, ist das Fehlerniveau bei Verwendung der ITR etwa um einen Faktor $\epsilon \approx \frac{1}{|\lambda|}$ kleiner als bei der IMR. Das unregelmäßige Ordnungsverhalten ist bei beiden Basisverfahren zu erkennen. Während sich bei der Interpolation an jedem Punkt bei der ITR keine wesentliche Verbesserung durch IDeC-Schritte erzielen lassen, verschlechtern sie sich bei IDeC-Verfahren mit der IMR als Basisverfahren sogar noch. Bei Interpolation an jedem 2. Punkt sind beide Varianten der IDeC zur Lösung geeignet, wobei bei der IMR etwas systematischere Ordnungen erzielt wurden.

- Vergleich der Interpolationsarten

Hier zeigt sich deutlich, daß durch die Oszillationsphänomene bei den Basisverfahren die IDeC bei Interpolation an jedem Punkt versagt. Bei Interpolation an jedem 2. Punkt war die IDeC wieder erfolgreich.

T R A P E Z R E G E L
 G L O B A L E VERBINDUNGSSTRATEGIE J E D E R PUNKT WIRD INTERPOLIERT M = 6
 T-WERTE: 8.33E-02 1.67E-01 2.50E-01 3.33E-01 4.17E-01 5.00E-01

OHNE VERFEINERUNG (H = 8.33E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: 7.82E-08 -6.97E-09 6.99E-08 -1.49E-08 6.09E-08 -2.35E-08
 1. DC-SCHRITT: -8.37E-10 8.45E-10 -7.51E-10 6.57E-10 -6.68E-10 1.50E-09
 2. DC-SCHRITT: 1.77E-11 -1.82E-11 1.64E-11 -1.46E-11 1.45E-11 -2.82E-11
 3. DC-SCHRITT: 1.80E-12 -2.04E-12 2.11E-12 -2.10E-12 1.85E-12 4.03E-13

Tabelle 5a

1. VERFEINERUNG (H = 4.17E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: -6.92E-10 -1.45E-09 -2.28E-09!-3.15E-09 -4.08E-09 -5.04E-09
 1. DC-SCHRITT: 4.15E-10 3.19E-10 7.30E-10! 1.11E-09 1.00E-09 1.38E-09
 2. DC-SCHRITT: -1.54E-11 -1.18E-11 -2.69E-11!-7.05E-11 -5.98E-11 -1.03E-10
 3. DC-SCHRITT: 5.24E-13 3.93E-13 9.96E-13! 3.67E-12 3.02E-12 5.72E-12
 O R D N U N G E N :
 BASISVERFAHREN: 6.82 2.26 4.94! 2.24 3.90 2.22
 1. DC-SCHRITT: 1.01 1.41 .04! -.75 -.59 .12
 2. DC-SCHRITT: .20 .62 -.72! -2.27 -2.04 -1.87
 3. DC-SCHRITT: 1.78 2.38 1.08! -.81 -.71 -3.83

Tabelle 5b

2. VERFEINERUNG (H = 2.08E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: -3.26E-11!-9.55E-11 -1.86E-10!-3.01E-10!-4.38E-10 -5.95E-10
 1. DC-SCHRITT: 1.50E-10! 5.10E-10 6.14E-10! 6.88E-10! 9.32E-10 9.76E-10
 2. DC-SCHRITT: -1.08E-11!-6.37E-11 -9.08E-11!-1.29E-10!-2.51E-10 -2.92E-10
 3. DC-SCHRITT: 7.78E-13! 6.54E-12 9.91E-12! 1.77E-11! 4.71E-11 5.94E-11
 O R D N U N G E N :
 BASISVERFAHREN 4.41! 3.93 3.61! 3.39! 3.22 3.08
 1. DC-SCHRITT: 1.47! -.68 .25! .69! .11 .50
 2. DC-SCHRITT: .51! -2.43 -1.75! -.87! -2.07 -1.50
 3. DC-SCHRITT: -.57! -4.05 -3.31! -2.27! -3.96 -3.38

Tabelle 5c

T R A P E Z R E G E L
 G L O B A L E VERBINDUNGSTRATEGIE J E D E R 2 . PUNKT WIRD INTERPOLIERT M = 6
 T-WERTE: 4.17E-02 8.33E-02 1.25E-01 1.67E-01 2.08E-01 2.50E-01 2.92E-01
 3.33E-01 3.75E-01 4.17E-01 4.58E-01 5.00E-01

OHNE VERFEINERUNG (H = 4.17E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: 1.99E-08 -6.92E-10 1.88E-08 -1.45E-09 1.76E-08 -2.28E-09 1.64E-08
 -3.15E-09 1.52E-08 -4.08E-09 1.39E-08 -5.04E-09
 1. DC-SCHRITT: 2.05E-08 -6.78E-13 1.98E-08 -6.95E-13 1.95E-08 -6.33E-13 1.91E-08
 -6.69E-13 1.88E-08 -6.25E-13 1.82E-08 -1.66E-14
 2. DC-SCHRITT: 2.08E-08 -6.78E-13 1.98E-08 -6.95E-13 1.96E-08 -6.33E-13 1.91E-08
 -6.69E-13 1.89E-08 -6.25E-13 1.80E-08 -1.66E-14
 3. DC-SCHRITT: 2.10E-08 -6.78E-13 1.97E-08 -6.95E-13 1.96E-08 -6.33E-13 1.90E-08
 -6.69E-13 1.90E-08 -6.25E-13 1.78E-08 -1.66E-14

Tabelle 6a

1. VERFEINERUNG (H = 2.08E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: -1.24E-11 -3.26E-11 -6.05E-11 -9.55E-11 -1.37E-10 -1.86E-10!-2.40E-10
 -3.01E-10 -3.67E-10 -4.38E-10 -5.14E-10 -5.95E-10
 1. DC-SCHRITT: -1.20E-14 -1.21E-14 -1.08E-14 -1.13E-14 -1.03E-14 1.84E-15!-6.21E-15
 -6.35E-15 -5.52E-15 -5.90E-15 -5.31E-15 2.36E-15
 2. DC-SCHRITT: -1.20E-14 -1.21E-14 -1.08E-14 -1.13E-14 -1.03E-14 1.84E-15!-6.21E-15
 -6.35E-15 -5.52E-15 -5.90E-15 -5.30E-15 2.37E-15
 3. DC-SCHRITT: -1.20E-14 -1.21E-14 -1.08E-14 -1.13E-14 -1.03E-14 1.84E-15!-6.21E-15
 -6.34E-15 -5.52E-15 -5.90E-15 -5.30E-15 2.37E-15

O R D N U N G E N :

BASISVERFAHREN: 10.65 4.41 8.28 3.93 7.01 3.61! 6.09
 3.39 5.37 3.22 4.75 3.08
 1. DC-SCHRITT: 20.70 5.80 20.81 5.94 20.86 8.43! 21.55
 6.72 21.70 6.73 21.71 2.81
 2. DC-SCHRITT: 20.72 5.80 20.81 5.94 20.86 8.42! 21.55
 6.72 21.71 6.73 21.69 2.81
 3. DC-SCHRITT: 20.74 5.80 20.80 5.94 20.86 8.42! 21.55
 6.72 21.71 6.73 21.68 2.81

Tabelle 6b

2. VERFEINERUNG (H = 1.04E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: 6.39E-11 1.14E-10 1.51E-10! 1.79E-10 1.97E-10 2.07E-10! 2.10E-10
 2.08E-10 2.00E-10! 1.88E-10 1.73E-10 1.53E-10
 1. DC-SCHRITT: -1.89E-16 -1.63E-16 6.90E-17!-1.02E-16 -8.82E-17 1.01E-16!-4.41E-17
 -3.86E-17 1.09E-16!-5.04E-18 -4.90E-18 1.01E-16
 2. DC-SCHRITT: -1.88E-16 -1.63E-16 6.92E-17!-1.02E-16 -8.79E-17 1.02E-16!-4.37E-17
 -3.81E-17 1.10E-16!-4.48E-18 -4.32E-18 1.02E-16
 3. DC-SCHRITT: -1.88E-16 -1.63E-16 6.92E-17!-1.02E-16 -8.79E-17 1.02E-16!-4.37E-17
 -3.81E-17 1.10E-16!-4.48E-18 -4.32E-18 1.02E-16

O R D N U N G E N :

BASISVERFAHREN: -2.37 -1.80 -1.32! -.90 -.52 -.16! .19
 .53 .87! 1.22 1.58 1.95
 1. DC-SCHRITT: 5.99 6.22 7.29! 6.79 6.87 4.18! 7.14
 7.36 5.66! 10.19 10.08 4.54
 2. DC-SCHRITT: 5.99 6.22 7.28! 6.80 6.87 4.18! 7.15
 7.38 5.65! 10.36 10.26 4.54
 3. DC-SCHRITT: 5.99 6.22 7.28! 6.80 6.87 4.18! 7.15
 7.38 5.65! 10.36 10.26 4.54

Tabelle 6c

MITTELPUNKTSREGEL
 GLOBALE VERBINDUNGSSTRATEGIE JEDER PUNKT WIRD INTERPOLIERT M = 6
 T-WERTE: 8.33E-02 1.67E-01 2.50E-01 3.33E-01 4.17E-01 5.00E-01

OHNE VERFEINERUNG (H = 8.33E-02)

F E H L E R
 BASISVERFAHREN: -1.27E-03 -9.93E-05 -1.35E-03 -1.79E-04 -1.41E-03 -2.37E-04
 1. DC-SCHRITT: 4.62E-03 -6.03E-03 6.38E-03 -5.97E-03 4.51E-03 1.12E-04
 2. DC-SCHRITT: -4.00E-02 5.39E-02 -5.77E-02 5.34E-02 -3.90E-02 -9.88E-04
 3. DC-SCHRITT: 3.56E-01 -4.81E-01 5.14E-01 -4.76E-01 3.47E-01 8.80E-03

Tabelle 7a

1. VERFEINERUNG (H = 4.17E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: -1.52E-05 -2.91E-05 -4.18E-05! -5.31E-05 -6.30E-05 -7.15E-05
 1. DC-SCHRITT: -1.48E-03 -1.45E-03 5.43E-05! -1.34E-03 -1.31E-03 1.02E-04
 2. DC-SCHRITT: 1.31E-02 1.28E-02 -4.75E-04! 1.14E-02 1.11E-02 -8.77E-04
 3. DC-SCHRITT: -1.16E-01 -1.13E-01 4.19E-03! -9.58E-02 -9.38E-02 7.57E-03
 O R D N U N G E N :
 BASISVERFAHREN: 6.39 1.77 5.02! 1.75 4.48 1.73
 1. DC-SCHRITT: 1.64 2.06 6.88! 2.15 1.78 .13
 2. DC-SCHRITT: 1.61 2.07 6.92! 2.23 1.81 .17
 3. DC-SCHRITT: 1.62 2.09 6.94! 2.31 1.89 .22

Tabelle 7b

2. VERFEINERUNG (H = 2.08E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: -5.90E-06! -1.13E-05 -1.62E-05! -2.06E-05! -2.45E-05 -2.79E-05
 1. DC-SCHRITT: -3.42E-04! -2.93E-04 4.57E-05! -2.29E-04! -1.93E-04 7.25E-05
 2. DC-SCHRITT: 2.96E-03! 2.31E-03 -3.74E-04! 1.60E-03! 1.16E-03 -5.40E-04
 3. DC-SCHRITT: -2.56E-02! -1.79E-02 3.09E-03! -1.06E-02! -5.97E-03 4.02E-03
 O R D N U N G E N :
 BASISVERFAHREN: 1.36! 1.37 1.37! 1.37! 1.36 1.36
 1. DC-SCHRITT: 2.11! 2.31 .25! 2.55! 2.76 .50
 2. DC-SCHRITT: 2.14! 2.47 .34! 2.83! 3.26 .70
 3. DC-SCHRITT: 2.17! 2.66 .44! 3.17! 3.97 .91

Tabelle 7c

MITTELPUNKTSREGEL
 GLOBALE VERBINDUNGSSTRATEGIE JEDER 2. PUNKT WIRD INTERPOLIERT N = 6
 T-WERTE: 4.17E-02 8.33E-02 1.25E-01 1.67E-01 2.08E-01 2.50E-01 2.92E-01
 3.33E-01 3.75E-01 4.17E-01 4.58E-01 5.00E-01

OHNE VERFEINERUNG (H = 4.17E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: -3.12E-04 -1.52E-05 -3.21E-04 -2.91E-05 -3.28E-04 -4.18E-05 -3.35E-04
 -5.31E-05 -3.40E-04 -6.30E-05 -3.44E-04 -7.15E-05
 1. DC-SCHRITT: -3.04E-04 2.97E-09 -2.98E-04 6.05E-09 -2.92E-04 8.80E-09 -2.87E-04
 1.13E-08 -2.81E-04 1.35E-08 -2.76E-04 1.50E-08
 2. DC-SCHRITT: -3.04E-04 -3.60E-10 -2.98E-04 -3.22E-10 -2.92E-04 -3.21E-10 -2.87E-04
 -3.19E-10 -2.81E-04 -2.84E-10 -2.76E-04 -6.02E-10
 3. DC-SCHRITT: -3.04E-04 -3.59E-10 -2.98E-04 -3.21E-10 -2.92E-04 -3.20E-10 -2.87E-04
 -3.18E-10 -2.81E-04 -2.84E-10 -2.76E-04 -6.01E-10

Tabelle 8a

1. VERFEINERUNG (H = 2.08E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: -3.01E-06 -5.90E-06 -8.66E-06 -1.13E-05 -1.38E-05 -1.62E-05! -1.85E-05
 -2.06E-05 -2.26E-05 -2.45E-05 -2.62E-05 -2.79E-05
 1. DC-SCHRITT: 1.60E-10 3.18E-10 4.67E-10 6.11E-10 7.47E-10 8.74E-10! 9.95E-10
 1.11E-09 1.22E-09 1.32E-09 1.42E-09 1.51E-09
 2. DC-SCHRITT: -3.22E-12 -2.82E-12 -2.76E-12 -2.70E-12 -2.33E-12 -5.39E-12! -7.32E-12
 -6.87E-12 -6.64E-12 -6.42E-12 -6.01E-12 -7.80E-12
 3. DC-SCHRITT: -3.21E-12 -2.81E-12 -2.75E-12 -2.69E-12 -2.31E-12 -5.37E-12! -7.29E-12
 -6.83E-12 -6.60E-12 -6.38E-12 -5.96E-12 -7.75E-12

O R D N U N G E N :

BASISVERFAHREN: 6.69 1.36 5.21 1.37 4.57 1.37! 4.18
 1.37 3.91 1.36 3.71 1.36
 1. DC-SCHRITT: 20.85 3.23 19.28 3.31 18.58 3.33! 18.14
 3.34 17.82 3.35 17.57 3.32
 2. DC-SCHRITT: 26.49 6.99 26.69 6.89 26.90 5.89! 25.22
 5.54 25.34 5.47 25.45 6.27
 3. DC-SCHRITT: 26.50 7.00 26.69 6.90 26.92 5.90! 25.23
 5.54 25.35 5.47 25.46 6.28

Tabelle 8b

2. VERFEINERUNG (H = 1.04E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: -1.76E-06 -3.30E-06 -4.66E-06! -5.86E-06 -6.92E-06 -7.85E-06! -8.67E-06
 -9.39E-06 -1.00E-05! -1.06E-05 -1.11E-05 -1.15E-05
 1. DC-SCHRITT: 2.38E-11 4.48E-11 6.32E-11! 7.95E-11 9.38E-11 1.06E-10! 1.18E-10
 1.27E-10 1.36E-10! 1.44E-10 1.50E-10 1.56E-10
 2. DC-SCHRITT: -2.16E-14 -1.95E-14 -4.11E-14! -5.39E-14 -4.71E-14 -6.12E-14! -6.78E-14
 -5.89E-14 -6.74E-14! -6.94E-14 -6.02E-14 -6.43E-14
 3. DC-SCHRITT: -2.17E-14 -1.93E-14 -4.11E-14! -5.38E-14 -4.67E-14 -6.08E-14! -6.72E-14
 -5.81E-14 -6.66E-14! -6.85E-14 -5.91E-14 -6.31E-14

O R D N U N G E N :

BASISVERFAHREN: .78 .84 .89! .95 1.00 1.04! 1.09
 1.13 1.17! 1.21 1.24 1.28
 1. DC-SCHRITT: 2.75 2.83 2.89! 2.94 2.99 3.04! 3.08
 3.13 3.17! 3.20 3.24 3.27
 2. DC-SCHRITT: 7.22 7.17 6.07! 5.65 5.63 6.46! 6.76
 6.87 6.62! 6.53 6.64 6.92
 3. DC-SCHRITT: 7.21 7.19 6.06! 5.64 5.63 6.46! 6.76
 6.88 6.63! 6.54 6.66 6.94

Tabelle 8c

c) Experimente mit $\lambda = -10^{10}$ (stark steifer Bereich)

Diese Experimente im sehr steifen Fall wurden unter denselben Bedingungen wie b) durchgeführt.

- Die Tabellen 9a – 9c zeigen wieder Experimente mit der ITR als Basisverfahren, wobei jeder Punkt interpoliert wurde. Es zeigen sich wieder die typischen Oszillationen (vgl. Tabelle 9a). Das Basisverfahren zeigt wieder die theoretischen Ordnungen, man beachte jedoch wiederum das unregelmäßige Verhalten an den „ungeraden“ Stellen. Bei den IDeC-Schritten zeigen sich deutliche Verbesserungen, jedoch keine idealen Ordnungen (nur der 1. IDeC-Schritt bringt eine Verbesserung des Fehlerniveaus).
- Für die Tabellen 10a – 10c wurden die Experimente mit der ITR als Basisverfahren durchgeführt, wobei jeder 2. Punkt interpoliert wurde. Man erkennt in Tabelle 10a wieder, daß die Näherung an den interpolierten Stellen gut ist. Es bringt jedoch nur der 1. IDeC-Schritt eine Verbesserung der Fehler! Systematische Ordnungen zeigen sich auch hier nur beim Basisverfahren.
- Bei den Tabellen 11a – 11c wurde das Experiment mit der IMR als Basisverfahren durchgeführt, wobei jeder Punkt interpoliert wurde. Es zeigt sich derselbe Effekt wie in den Tabellen 7a – 7c, jedoch hat das Basisverfahren systematischere Ordnungen. Die Defektkorrektur versagt, wie erwartet.
- In den Tabellen 12a – 12c wurden die Experimente mit der IMR als Basisverfahren durchgeführt, wobei jeder 2. Punkt interpoliert wurde. Es zeigt sich derselbe Effekt wie in den Tabellen 8a – 8c, jedoch sind die Ordnungen viel systematischer.

- Vergleich ITR — IMR

Wiederum ist die ITR als Basisverfahren um einen Faktor $\epsilon = \frac{1}{|\lambda|}$ genauer als die IMR. Bei Interpolation an jedem Punkt brachte bei der ITR nur der 1. IDeC-Schritt eine Verbesserung des Fehlers, bei der IMR versagte die IDeC völlig. Falls nur jeder 2. Punkt interpoliert wurde, brachte auch hier bei der ITR nur der 1. IDeC-Schritt eine Verbesserung der Fehler — durch die systematischeren Ordnungen bei der IMR kam man trotz des ϵ -Faktors der ITR bei den Defektkorrekturschritten mit der IMR als Basisverfahren schon fast an das Fehlerniveau bei der ITR (des Basisverfahrens) heran.

- Vergleich der Interpolationsarten

Bei der ITR brachte die Interpolation an jedem 2. Punkt keine Verbesserung gegenüber der Interpolation an jedem Punkt. Dies läßt sich offenbar damit begründen, daß die Oszillation des Fehlers bei der ITR durch den $\left(\epsilon = \frac{1}{|\lambda|}\right)$ -Faktor so stark gedämpft ist, daß ihr Einfluß auf die Interpolationsqualität nicht mehr so wesentlich ist! Während bei der IMR die IDeC-Variante, bei der an jedem Punkt interpoliert wurde, völlig versagte, stellten sich bei der IDeC-Variante, bei der an jedem 2. Punkt interpoliert wurde, die Systematik wieder ein.

- Vergleich stark steifer Fall (c) — mittelsteifer Fall (b)

Offensichtlich funktioniert ein IDeC-Schritt mit der ITR und Interpolation an

jedem Punkt im stark steifen Fall in befriedigender Weise (im Gegensatz zum mittelsteifen Fall). Vgl. die Tabellen 5a – 5c und 9a – 9c.

T R A P E Z R E G E L
 G L O B A L E VERBINDUNGSSTRATEGIE J E D E R PUNKT WIRD INTERPOLIERT M = 6
 T-WERTE 8.33E-02 1.67E-01 2.50E-01 3.33E-01 4.17E-01 5.00E-01

OHNE VERFEINERUNG (H = 8.33E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: 7.83E-14 -7.36E-15 7.05E-14 -1.57E-14 6.18E-14 -2.46E-14
 1. DC-SCHRITT: 2.14E-18 -2.40E-18 2.44E-18 -2.40E-18 2.17E-18 -2.55E-19
 2. DC-SCHRITT: 2.14E-18 -2.40E-18 2.44E-18 -2.40E-18 2.17E-18 -2.57E-19
 3. DC-SCHRITT: 2.14E-18 -2.40E-18 2.44E-18 -2.40E-18 2.17E-18 -2.57E-19

Tabelle 9a

1. VERFEINERUNG (H = 4.17E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: -8.87E-16 -1.84E-15 -2.85E-15!-3.91E-15 -5.02E-15 -6.16E-15
 1. DC-SCHRITT: -4.32E-20 -4.34E-20 -1.07E-21!-2.95E-20 -2.96E-20 -2.44E-21
 2. DC-SCHRITT: -4.37E-20 -4.37E-20 -1.84E-21!-3.07E-20 -3.08E-20 -3.99E-21
 3. DC-SCHRITT: -4.37E-20 -4.37E-20 -1.84E-21!-3.07E-20 -3.08E-20 -3.99E-21
 O R D N U N G E N :
 BASISVERFAHREN: 6.46 2.00 4.63! 2.00 3.62 2.00
 1. DC-SCHRITT: 5.63 5.79 11.15! 6.35 6.19 6.71
 2. DC-SCHRITT: 5.62 5.78 10.37! 6.29 6.14 6.01
 3. DC-SCHRITT: 5.62 5.78 10.37! 6.29 6.14 6.01

Tabelle 9b

2. VERFEINERUNG (H = 2.08E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: -2.22E-16!-4.60E-16 -7.12E-16!-9.78E-16!-1.25E-15 -1.54E-15
 1. DC-SCHRITT: -5.58E-22!-3.23E-23 7.33E-22! 4.09E-22! 9.50E-22 1.48E-21
 2. DC-SCHRITT: -7.28E-22!-6.35E-22 -2.88E-23!-5.34E-22!-4.25E-22 -6.22E-23
 3. DC-SCHRITT: -7.28E-22!-6.35E-22 -2.88E-23!-5.34E-22!-4.25E-22 -6.22E-23
 O R D N U N G E N :
 BASISVERFAHREN: 2.00! 2.00 2.00! 2.00! 2.00 2.00
 1. DC-SCHRITT: 6.28! 10.39 .53! 6.17! 4.96 .72
 2. DC-SCHRITT: 5.91! 6.11 6.00! 5.85! 6.18 6.00
 3. DC-SCHRITT: 5.91! 6.11 6.00! 5.85! 6.18 6.00

Tabelle 9c

TRAPEZREGEL :
 GLOBALE VERBINDUNGSSTRATEGIE J E D E R 2 . PUNKT WIRD INTERPOLIERT M = 6
 T-WERTE: 4.17E-02 8.33E-02 1.25E-01 1.67E-01 2.08E-01 2.50E-01 2.92E-01
 3.33E-01 3.75E-01 4.17E-01 4.58E-01 5.00E-01

OHNE VERFEINERUNG (H = 4.17E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: 2.00E-14 -8.87E-16 1.91E-14 -1.84E-15 1.81E-14 -2.85E-15 1.71E-14
 -3.91E-15 1.60E-14 -5.02E-15 1.49E-14 -6.16E-15
 1. DC-SCHRITT: 2.39E-10 -6.89E-19 -6.41E-11 -7.19E-19 3.50E-11 -6.70E-19 -3.44E-11
 -7.19E-19 6.08E-11 -6.87E-19 -2.19E-10 -8.94E-20
 2. DC-SCHRITT: 4.78E-10 -6.89E-19 -1.28E-10 -7.19E-19 7.01E-11 -6.70E-19 -6.88E-11
 -7.19E-19 1.22E-10 -6.87E-19 -4.38E-10 -8.94E-20
 3. DC-SCHRITT: 7.17E-10 -6.89E-19 -1.92E-10 -7.19E-19 1.05E-10 -6.70E-19 -1.03E-10
 -7.19E-19 1.83E-10 -6.87E-19 -6.57E-10 -8.94E-20

Tabelle 10a

1. VERFEINERUNG (H = 2.08E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: -1.09E-16 -2.22E-16 -3.39E-16 -4.60E-16 -5.84E-16 -7.12E-16!-8.43E-16
 -9.78E-16 -1.11E-15 -1.25E-15 -1.40E-15 -1.54E-15
 1. DC-SCHRITT: -1.24E-20 -1.30E-20 -1.21E-20 -1.30E-20 -1.24E-20 -6.42E-22!-8.90E-21
 -9.27E-21 -8.68E-21 -9.27E-21 -8.88E-21 -1.39E-21
 2. DC-SCHRITT: -1.24E-20 -1.30E-20 -1.21E-20 -1.30E-20 -1.24E-20 -6.42E-22!-8.90E-21
 -9.27E-21 -8.68E-21 -9.27E-21 -8.88E-21 -1.39E-21
 3. DC-SCHRITT: -1.24E-20 -1.30E-20 -1.21E-20 -1.30E-20 -1.24E-20 -6.42E-22!-8.90E-21
 -9.27E-21 -8.68E-21 -9.27E-21 -8.88E-21 -1.39E-21

O R D N U N G E N :
 BASISVERFAHREN: 7.52 2.00 5.82 2.00 4.96 2.00! 4.34
 2.00 3.84 2.00 3.41 2.00
 1. DC-SCHRITT: 34.16 5.73 32.30 5.79 31.39 10.03! 31.85
 6.28 32.71 6.21 34.52 6.01
 2. DC-SCHRITT: 35.16 5.73 33.30 5.79 32.39 10.03! 32.85
 6.28 33.71 6.21 35.52 6.01
 3. DC-SCHRITT: 35.75 5.73 33.89 5.79 32.98 10.03! 33.43
 6.28 34.29 6.21 36.11 6.01

Tabelle 10b

2. VERFEINERUNG (H = 1.04E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: -2.72E-17 -5.54E-17 -8.47E-17!-1.15E-16 -1.46E-16 -1.78E-16!-2.11E-16
 -2.44E-16 -2.79E-16!-3.13E-16 -3.49E-16 -3.85E-16
 1. DC-SCHRITT: -2.16E-22 -2.16E-22 -4.77E-24!-1.90E-22 -1.90E-22 -1.00E-23!-1.60E-22
 -1.60E-22 -1.57E-23!-1.29E-22 -1.29E-22 -2.17E-23
 2. DC-SCHRITT: -2.16E-22 -2.16E-22 -4.77E-24!-1.90E-22 -1.90E-22 -1.00E-23!-1.60E-22
 -1.60E-22 -1.57E-23!-1.29E-22 -1.29E-22 -2.17E-23
 3. DC-SCHRITT: -2.16E-22 -2.16E-22 -4.77E-24!-1.90E-22 -1.90E-22 -1.00E-23!-1.60E-22
 -1.60E-22 -1.57E-23!-1.29E-22 -1.29E-22 -2.17E-23

O R D N U N G E N :
 BASISVERFAHREN: 2.00 2.00 2.00! 2.00 2.00 2.00 2.00! 2.00
 2.00 2.00! 2.00 2.00 2.00
 1. DC-SCHRITT: 5.85 5.91 11.31! 6.10 6.03 6.00! 5.80
 5.86 9.11! 6.17 6.11 6.00
 2. DC-SCHRITT: 5.85 5.91 11.31! 6.10 6.03 6.00! 5.80
 5.86 9.11! 6.17 6.11 6.00
 3. DC-SCHRITT: 5.85 5.91 11.31! 6.10 6.03 6.00! 5.80
 5.86 9.11! 6.17 6.11 6.00

Tabelle 10c

MITTELPUNKTSREGEL
 GLOBALE VERBINGUNGSSTRATEGIE JEDER PUNKT WIRD INTERPOLIERT M = 6
 T-WERTE: 8.33E-02 1.67E-01 2.50E-01 3.33E-01 4.17E-01 5.00E-01

OHNE VERFEINERUNG (H = 8.33E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: -1.28E-03 -9.34E-05 -1.36E-03 -1.67E-04 -1.42E-03 -2.19E-04
 1. DC-SCHRITT: 4.68E-03 -6.14E-03 6.53E-03 -6.14E-03 4.68E-03 1.89E-07
 2. DC-SCHRITT: -4.10E-02 5.55E-02 -5.96E-02 5.55E-02 -4.10E-02 -3.78E-09
 3. DC-SCHRITT: 3.69E-01 -5.00E-01 5.37E-01 -5.00E-01 3.69E-01 6.50E-09

Tabelle 11a

1. VERFEINERUNG (H = 4.17E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: -1.22E-05 -2.33E-05 -3.32E-05! -4.18E-05 -4.90E-05 -5.48E-05
 1. DC-SCHRITT: -1.53E-03 -1.53E-03 7.25E-09! -1.53E-03 -1.53E-03 1.20E-08
 2. DC-SCHRITT: 1.39E-02 1.39E-02 -5.39E-10! 1.39E-02 1.39E-02 -1.07E-09
 3. DC-SCHRITT: -1.25E-01 -1.25E-01 4.60E-09! -1.25E-01 -1.25E-01 9.20E-09
 O R D N U N G E N :
 BASISVERFAHREN: 6.71 2.00 5.36! 2.00 4.86 2.00
 1. DC-SCHRITT: 1.61 2.00 19.78! 2.00 1.61 3.98
 2. DC-SCHRITT: 1.56 2.00 26.72! 2.00 1.56 1.82
 3. DC-SCHRITT: 1.56 2.00 26.80! 2.00 1.56 -1.50

Tabelle 11b

2. VERFEINERUNG (H = 2.08E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: -3.06E-06! -5.83E-06 -8.30E-06! -1.04E-05! -1.22E-05 -1.37E-05
 1. DC-SCHRITT: -3.84E-04! -3.84E-04 5.08E-10! -3.84E-04! -3.84E-04 8.58E-10
 2. DC-SCHRITT: 3.47E-03! 3.47E-03 -5.14E-10! 3.47E-03! 3.47E-03 -1.03E-09
 3. DC-SCHRITT: -3.12E-02! -3.12E-02 4.62E-09! -3.12E-02! -3.12E-02 9.24E-09
 O R D N U N G E N :
 BASISVERFAHREN: 2.00! 2.00 2.00! 2.00! 2.00 2.00
 1. DC-SCHRITT: 2.00! 2.00 3.84! 2.00! 2.00 3.80
 2. DC-SCHRITT: 2.00! 2.00 .07! 2.00! 2.00 .06
 3. DC-SCHRITT: 2.00! 2.00 -.01! 2.00! 2.00 -.01

Tabelle 11c

MITTELPUNKTSREGEL
 GLOBALE VERBINDUNGSSTRATEGIE JEDER 2. PUNKT WIRD INTERPOLIERT M = 6
 T-WERTE: 4.17E-02 8.33E-02 1.25E-01 1.67E-01 2.08E-01 2.50E-01 2.92E-01
 3.33E-01 3.75E-01 4.17E-01 4.58E-01 5.00E-01

OHNE VERFEINERUNG (H = 4.17E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: -3.13E-04 -1.22E-05 -3.25E-04 -2.33E-05 -3.35E-04 -3.32E-05 -3.45E-04
 -4.18E-05 -3.53E-04 -4.90E-05 -3.59E-04 -5.48E-05
 1. DC-SCHRITT: -3.07E-04 2.34E-09 -3.07E-04 4.79E-09 -3.07E-04 6.92E-09 -3.07E-04
 8.77E-09 -3.07E-04 1.04E-08 -3.07E-04 1.14E-08
 2. DC-SCHRITT: -3.07E-04 -3.65E-10 -3.07E-04 -3.33E-10 -3.07E-04 -3.38E-10 -3.07E-04
 -3.43E-10 -3.07E-04 -3.14E-10 -3.07E-04 -6.38E-10
 3. DC-SCHRITT: -3.07E-04 -3.65E-10 -3.07E-04 -3.33E-10 -3.07E-04 -3.38E-10 -3.07E-04
 -3.43E-10 -3.07E-04 -3.14E-10 -3.07E-04 -6.38E-10

Tabelle 12a

1. VERFEINERUNG (H = 2.08E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: -1.56E-06 -3.06E-06 -4.48E-06 -5.83E-06 -7.11E-06 -8.30E-06!-9.41E-06
 -1.04E-05 -1.14E-05 -1.22E-05 -1.30E-05 -1.37E-05
 1. DC-SCHRITT: 8.20E-11 1.63E-10 2.41E-10 3.14E-10 3.83E-10 4.45E-10! 5.04E-10
 5.60E-10 6.11E-10 6.57E-10 7.00E-10 7.35E-10
 2. DC-SCHRITT: -3.32E-12 -3.03E-12 -3.07E-12 -3.11E-12 -2.83E-12 -6.00E-12!-8.19E-12
 -8.00E-12 -8.03E-12 -8.06E-12 -7.88E-12 -9.90E-12
 3. DC-SCHRITT: -3.32E-12 -3.03E-12 -3.07E-12 -3.11E-12 -2.83E-12 -6.00E-12!-8.19E-12
 -8.00E-12 -8.03E-12 -8.06E-12 -7.88E-12 -9.90E-12

O R D N U N G E N :
 BASISVERFAHREN: 7.65 2.00 6.18 2.00 5.56 2.00! 5.19
 2.00 4.95 2.00 4.79 2.00
 1. DC-SCHRITT: 21.84 3.84 20.28 3.93 19.61 3.96! 19.22
 3.97 18.94 3.98 18.74 3.95
 2. DC-SCHRITT: 26.46 6.91 26.57 6.74 26.69 5.82! 25.16
 5.42 25.19 5.28 25.21 6.01
 3. DC-SCHRITT: 26.46 6.91 26.57 6.74 26.69 5.82! 25.16
 5.42 25.19 5.28 25.21 6.01

Tabelle 12b

2. VERFEINERUNG (H = 1.04E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: -3.91E-07 -7.65E-07 -1.12E-06!-1.46E-06 -1.78E-06 -2.07E-06!-2.35E-06
 -2.61E-06 -2.85E-06!-3.06E-06 -3.25E-06 -3.42E-06
 1. DC-SCHRITT: 5.28E-12 1.04E-11 1.52E-11! 1.97E-11 2.40E-11 2.81E-11! 3.18E-11
 3.53E-11 3.85E-11! 4.14E-11 4.40E-11 4.63E-11
 2. DC-SCHRITT: -2.52E-14 -2.59E-14 -5.06E-14!-7.21E-14 -7.27E-14 -9.36E-14!-1.11E-13
 -1.12E-13 -1.28E-13!-1.42E-13 -1.42E-13 -1.55E-13
 3. DC-SCHRITT: -2.52E-14 -2.59E-14 -5.06E-14!-7.21E-14 -7.27E-14 -9.36E-14!-1.11E-13
 -1.12E-13 -1.28E-13!-1.42E-13 -1.42E-13 -1.55E-13

O R D N U N G E N :
 BASISVERFAHREN: 2.00 2.00 2.00! 2.00 2.00 2.00 2.00! 2.00
 2.00 2.00! 2.00 2.00 2.00
 1. DC-SCHRITT: 3.96 3.98 3.99! 3.99 4.00 3.99! 3.98
 3.99 3.99! 3.99 3.99 3.99
 2. DC-SCHRITT: 7.04 6.87 5.92! 5.43 5.28 6.00! 6.20
 6.16 5.97! 5.83 5.79 6.00
 3. DC-SCHRITT: 7.04 6.87 5.92! 5.43 5.28 6.00! 6.20
 6.16 5.97! 5.83 5.79 6.00

Tabelle 12c

d) Interpolation über einen Schrittweitenwechsel

In den Tabellen 13a – 18b wurden die Ergebnisse der Experimente mit Beispiel 1 ausgegeben, bei denen über einen Schrittweitenwechsel interpoliert wurde. Die Differentialgleichungen wurden für die Erstellung der Tabellen auf dem Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ gelöst. Dieses Intervall wurde derart in zwei Teilintervalle $[0, \bar{T}]$ und $[\bar{T}, \frac{1}{2}]$ geteilt, daß für das Verhältnis ihrer Längen $(\frac{1}{2} - \bar{T}) : \bar{T} = \bar{h} : h$ gilt. Beide Intervalle wurden nun in $\frac{m}{2}$ äquidistante Teilintervalle geteilt. Durch die Endpunkte dieser Intervalle sind nun die zu interpolierenden Stützpunkte vorgegeben. Die folgenden Tabellen (13a – 18b) ergeben ein durchaus einheitliches Bild: wie schon aufgrund theoretischer Überlegungen zu erwarten, zeigt sich das Versagen der IDeC in jenen Fällen, in denen über den Schrittweitenwechsel hinweg interpoliert wurde, und zwar sowohl im nichtsteifen Fall ($\lambda = -1$, Interpolation an jedem Punkt) als auch im steifen Fall ($\lambda = 10^{10}$, Interpolation in jedem und jedem zweiten Punkt).

T R A P E Z R E G E L
 G L O B A L E VERBINDUNGSSTRATEGIE J E D E R PUNKT WIRD INTERPOLIERT M = 4
 LAMBDA = -1.00E+00
 T-WERTE: 8.33E-02 1.67E-01 3.33E-01 5.00E-01

OHNE VERFEINERUNG (H1 = 8.33E-02 - H2 = 1.67E-01)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: 3.13E-05 5.72E-05 2.30E-04 3.23E-04
 1. DC-SCHRITT: -7.75E-06 -1.08E-05 6.38E-06 7.54E-05
 2. DC-SCHRITT: -4.38E-07 -5.85E-07 -1.82E-06 -6.91E-06

Tabelle 13a

1. VERFEINERUNG (H1 = 4.17E-02 - H2 = 8.33E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: 7.83E-06 1.43E-05! 5.73E-06 8.03E-05
 1. DC-SCHRITT: -6.33E-09 -1.22E-08! -1.60E-07 -2.83E-07
 2. DC-SCHRITT: -3.97E-09 -7.89E-09! -8.72E-08 -1.63E-07
 O R D N U N G E N :
 BASISVERFAHREN: 2.00 2.00! 2.01 2.01
 1. DC-SCHRITT: 10.26 9.79! 5.32 8.06
 2. DC-SCHRITT: 6.79 6.21! 4.38 5.41

Tabelle 13b

M I T T E L P U N K T S R E G E L
 G L O B A L E VERBINDUNGSSTRATEGIE J E D E R PUNKT WIRD INTERPOLIERT M = 4
 LAMBDA = -1.00E+00
 T-WERTE: 8.33E-02 1.67E-01 3.33E-01 5.00E-01

OHNE VERFEINERUNG (H1 = 8.33E-02 - H2 = 1.67E-01)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: -6.68E-05 -1.30E-04 -6.60E-04 -1.12E-03
 1. DC-SCHRITT: 3.30E-01 7.76E-01 -1.73E+00 -2.81E+00
 2. DC-SCHRITT: 2.32E-01 2.43E-01 -1.81E+00 -6.83E+00

Tabelle 14a

1. VERFEINERUNG (H1 = 4.17E-02 - H2 = 8.33E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: -1.67E-05 -3.26E-05! -1.65E-04 -2.80E-04
 1. DC-SCHRITT: 4.88E-09 9.66E-09! 1.52E-07 2.80E-07
 2. DC-SCHRITT: 2.67E-09 5.35E-09! 5.91E-08 1.11E-07
 O R D N U N G E N :
 BASISVERFAHREN: 2.00 2.00! 2.00 2.00
 1. DC-SCHRITT: 26.01 26.26! 23.44 23.26
 2. DC-SCHRITT: 26.37 25.44! 24.87 25.88

Tabelle 14b

T R A P E Z R E G E L
 G L O B A L E VERBINDUNGSSTRATEGIE J E D E R PUNKT WIRD INTERPOLIERT M = 4
 LAMBDA = -1.00E+10
 T-WERTE: 8.33E-02 1.67E-01 3.33E-01 5.00E-01

OHNE VERFEINERUNG (H1 = 8.33E-02 - H2 = 1.67E-01)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: 7.83E-14 -7.36E-15 2.43E-13 -7.66E-14
 1. DC-SCHRITT: -7.59E-16 7.44E-16 -8.93E-17 -3.70E-15
 2. DC-SCHRITT: -7.59E-16 7.44E-16 -8.93E-17 -3.70E-15

Tabelle 15a

1. VERFEINERUNG (H1 = 4.17E-02 - H2 = 8.33E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: -8.87E-16 -1.84E-15! -1.01E-14 -1.91E-14
 1. DC-SCHRITT: 3.31E-17 1.28E-18! 3.76E-16 4.94E-17
 2. DC-SCHRITT: 3.31E-17 1.28E-18! 3.76E-16 4.94E-17
 O R D N U N G E N :
 BASISVERFAHREN: 6.46 2.00! 4.59 2.00
 1. DC-SCHRITT: 4.52 9.19! -2.07 6.23
 2. DC-SCHRITT: 4.52 9.19! -2.07 6.23

Tabelle 15b

M I T T E L P U N K T S R E G E L
 G L O B A L E VERBINDUNGSSTRATEGIE J E D E R PUNKT WIRD INTERPOLIERT M = 4
 LAMBDA = -1.00E+10
 T-WERTE: 8.33E-02 1.67E-01 3.33E-01 5.00E-01

OHNE VERFEINERUNG (H1 = 8.33E-02 - H2 = 1.67E-01)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: -1.28E-03 -9.34E-05 -5.88E-03 -5.98E-04
 1. DC-SCHRITT: 1.62E-03 -1.87E-03 -1.05E-03 1.19E-02
 2. DC-SCHRITT: -2.41E-03 2.13E-03 2.83E-03 -2.87E-03

Tabelle 16a

1. VERFEINERUNG (H1 = 4.17E-02 - H2 = 8.33E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: -1.22E-05 -2.33E-05! -9.71E-05 -1.49E-04
 1. DC-SCHRITT: -6.14E-04 1.78E-08! -2.74E-03 4.01E-07
 2. DC-SCHRITT: 1.92E-03 1.77E-08! 8.56E-03 4.01E-07
 O R D N U N G E N :
 BASISVERFAHREN: 6.71 2.00! 5.92 2.00
 1. DC-SCHRITT: 1.40 16.68! -1.38 14.85
 2. DC-SCHRITT: .33 16.88! -1.79 12.81

Tabelle 16b

T R A P E Z R E G E L
 G L O B A L E VERBINDUNGSSTRATEGIE J E D E R 2 . PUNKT WIRD INTERPOLIERT M = 4
 LAMBDA = -1.00E+10
 T-WERTE: 4.17E-02 8.33E-02 1.25E-01 1.67E-01 2.50E-01 3.33E-01 4.17E-01
 5.00E-01

OHNE VERFEINERUNG (H1 = 4.17E-02 - H2 = 8.33E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: 2.00E-14 -8.87E-16 1.91E-14 -1.84E-15 6.50E-14 -1.01E-14 5.63E-14
 -1.91E-14
 1. DC-SCHRITT: -1.36E-07 1.26E-16 7.77E-08 1.87E-16 -3.21E-07 3.53E-19 1.02E-06
 -8.87E-16
 2. DC-SCHRITT: -2.72E-07 1.26E-16 1.55E-07 1.87E-16 -6.42E-07 3.53E-19 2.05E-06
 -8.87E-16

Tabelle 17a

1. VERFEINERUNG (H1 = 8.33E-02 - H2 = 4.17E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: -1.09E-16 2.22E-16 -3.39E-16 -4.60E-16! -1.47E-15 -2.53E-15 -3.65E-15
 -4.78E-15
 1. DC-SCHRITT: 6.27E-18 8.30E-18 6.26E-18 3.79E-19! 7.34E-17 9.51E-17 7.30E-17
 1.47E-17
 2. DC-SCHRITT: 6.27E-18 8.30E-18 6.26E-18 3.79E-19! 7.34E-17 9.51E-17 7.30E-17
 1.47E-17
 O R D N U N G E N :
 BASISVERFAHREN: 7.52 2.00 5.82 2.00! 5.47 2.00 3.95
 2.00
 1. DC-SCHRITT: 34.33 3.92 33.53 8.95! 32.03 -8.07 33.71
 5.92
 2. DC-SCHRITT: 35.33 3.92 34.53 8.95! 33.03 -8.07 34.71
 5.92

Tabelle 17b

M I T T E L P U N K T S R E G E L
 G L O B A L E VERBINDUNGSSTRATEGIE J E D E R 2 . PUNKT WIRD INTERPOLIERT M = 4
 LAMBDA = -1.00E+10
 T-WERTE: 4.17E-02 8.33E-02 1.25E-01 1.67E-01 2.50E-01 3.33E-01 4.17E-01
 5.00E-01

OHNE VERFEINERUNG (H1 = 4.17E-02 - H2 = 8.33E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: -3.13E-04 -1.22E-05 -3.25E-04 -2.33E-05 -1.43E-03 -9.71E-05 -1.49E-03
 -1.49E-04
 1. DC-SCHRITT: -3.04E-04 -1.02E-06 -3.08E-04 -1.59E-06 -1.38E-03 4.35E-07 -1.35E-03
 1.30E-05
 2. DC-SCHRITT: -3.03E-04 1.19E-07 -3.08E-04 1.32E-07 -1.38E-03 1.24E-07 -1.35E-03
 1.67E-06

Tabelle 18a

1. VERFEINERUNG (H1 = 8.33E-02 - H2 = 4.17E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: -1.56E-06 -3.06E-06 -4.48E-06 -5.83E-06! -1.57E-05 -2.43E-05 -3.15E-05
 -3.73E-05
 1. DC-SCHRITT: 2.38E-09 2.18E-09 1.99E-09 4.28E-09! 5.84E-09 5.37E-08 4.98E-08
 9.67E-08
 2. DC-SCHRITT: 2.38E-09 2.18E-09 1.99E-09 4.28E-09! 5.84E-09 5.37E-08 4.98E-08
 9.67E-08
 O R D N U N G E N :
 BASISVERFAHREN: 7.65 2.00 6.18 2.00! 6.51 2.00 5.57
 2.00
 1. DC-SCHRITT: 16.96 8.88 17.24 8.54! 14.53 3.02 14.72
 7.07
 2. DC-SCHRITT: 16.96 5.77 17.23 4.95! 14.53 1.20 14.73
 4.11

Tabelle 18b

e) Verbindungsstrategien

Während in den anderen Tabellen überall die globale Verbindungsstrategie verwendet wurde, wurde für die Experimente in den Tabellen 19a – 19c die lokale Verbindungsstrategie verwendet. Die Tabellen wurden für den mittelsteifen Fall mit $\lambda = -10000$ erstellt. Die Rechnungen wurden auf dem Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ durchgeführt. Es wurde jeder Punkt interpoliert. Als Basisverfahren wurde die IMR gewählt. Interpoliert wurde durch Polynome vom Grad 6. Um die beiden Verbindungsstrategien gegenüberzustellen, wurden diese Tabellen mit den analogen Tabellen mit der globalen Verbindungsstrategie verglichen. Da bei der Lösung auf dem größten Gitter noch über das Gesamtintervall interpoliert wurde und daher keine Verbindungsstrategie durchgeführt wurde, ist die Tabelle 19a mit der Tabelle 7a identisch (außer daß bei Tabelle 7a ein zusätzlicher IDeC-Schritt angegeben wurde, der jedoch beim gewählten Polynomgrad sinnlos ist). Zum besseren Vergleich mit den weiteren Tabellen zu diesem Experiment wurde sie jedoch noch einmal angegeben. In den weiteren Tabellen sind nur mehr die ersten Spalten identisch, da nur mehr dort die Differentialgleichungen auf dieselbe Weise gelöst wurden. Bei Vergleich der weiteren Spalten dieser Tabelle fällt auf, daß das Fehlerniveau bei der lokalen Verbindungsstrategie deutlich schlechter ist. Dieser Effekt tritt aus dem Grund auf, da hier die IDeC-Schritte ein immer schlechteres Fehlerniveau besitzen und bei der lokalen Verbindungsstrategie daher die schlechteste Näherung der exakten Lösung als neuer Startwert angenommen wird.

Falls die Defektkorrektur jedoch funktioniert, wird als neuer Startwert die beste Näherung der exakten Lösung genommen. Entsprechende Experimente mit der lokalen Verbindungsstrategie zeigen ein ähnliches Fehlerniveau wie die analogen mit der globalen Verbindungsstrategie, jedoch wird dadurch die Systematik der Ordnungen zerstört, die bei der globalen Verbindungsstrategie auftritt.

MITTELPUNKTSREGEL
 LOKALE VERBINDUNGSSTRATEGIE JEDER PUNKT WIRD INTERPOLIERT M = 6
 T-WERTE: 8.33E-02 1.67E-01 2.50E-01 3.33E-01 4.17E-01 5.00E-01

OHNE VERFEINERUNG (H = 8.33E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: -1.27E-03 -9.93E-05 -1.35E-03 -1.79E-04 -1.41E-03 -2.37E-04
 1. DC-SCHRITT: 4.62E-03 -6.03E-03 6.38E-03 -5.97E-03 4.51E-03 1.12E-04
 2. DC-SCHRITT: -4.00E-02 5.39E-02 -5.77E-02 5.34E-02 -3.90E-02 -9.88E-04

Tabelle 19a

1. VERFEINERUNG (H = 4.17E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: -1.52E-05 -2.91E-05 -4.18E-05! -4.78E-04 -4.80E-04 -4.80E-04
 1. DC-SCHRITT: -1.48E-03 -1.45E-03 5.43E-05! 2.31E-03 2.26E-03 -5.50E-04
 2. DC-SCHRITT: 1.31E-02 1.28E-02 -4.75E-04! -2.05E-02 -2.00E-02 2.75E-04
 O R D N U N G E N :
 BASISVERFAHREN: 6.39 1.77 5.02! -1.42 1.56 -1.02
 1. DC-SCHRITT: 1.64 2.06 6.88! 1.37 1.00 -2.30
 2. DC-SCHRITT: 1.61 2.07 6.92! 1.38 .96 1.85

Tabelle 19b

2. VERFEINERUNG (H = 2.08E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: -5.90E-06! -2.14E-04 -2.04E-04! 6.13E-04! -2.94E-03 -2.73E-03
 1. DC-SCHRITT: -3.42E-04! 1.43E-03 -3.14E-04! -5.75E-03! 2.49E-02 -4.72E-03
 2. DC-SCHRITT: 2.96E-03! -1.24E-02 6.68E-04! 4.99E-02! -2.16E-01 1.24E-02
 O R D N U N G E N :
 BASISVERFAHREN 1.36! -2.88 -2.29! -.36! -2.61 -2.50
 1. DC-SCHRITT: 2.11! .02 -2.53! -1.32! -3.46 -3.10
 2. DC-SCHRITT: 2.14! .05 -.49! -1.29! -3.43 -5.50

Tabelle 19c

4.2. Testproblem 2

4.2.1. Beschreibung von Testproblem 2

Als nächstes Beispiel wurde ein System von zwei Gleichungen 1. Ordnung gewählt:

$$\begin{aligned}y_1' &= (1 + \cos t)(y_1 - g_1(t)) + \frac{1}{\omega} \sin[\omega(y_1 - g_1(t))] + \\ &\quad + (1 + \cos t) \frac{1}{\omega} \sin[\omega(y_2 - g_2(t))] + g_1'(t) \\ y_2' &= (1 + \cos t) \frac{1}{\omega} \sin[\omega(y_1 - g_1(t))] + (\lambda - \sin t)(y_2 - g_2(t)) + \\ &\quad + \frac{1}{\omega} \sin[\omega(y_2 - g_2(t))] + g_2'(t), \\ y_1(0) &= g_1(0), \quad y_2(0) = g_2(0), \quad t \in [0, T]\end{aligned}\tag{4.4}$$

mit

$$\begin{aligned}g_1(t) &= \sin(t + 0.7854) \\ g_2(t) &= \cos(t + 0.7854)\end{aligned}$$

Die exakte Lösung von (4.4) ist

$$\begin{aligned}y_1(t) &= g_1(t), \\ y_2(t) &= g_2(t), \quad t \in [0, T].\end{aligned}\tag{4.5}$$

Die Parameter λ und ω können frei gesetzt werden, wobei mit λ die Steifheit und mit ω die Nichtlinearität variiert werden kann.

Die Jacobi-Matrix von (4.4) lautet

$$J = \begin{pmatrix} 1 + \cos t + \cos[\omega(y_1 - g_1(t))] & (1 + \cos t) \cos[\omega(y_2 - g_2(t))] \\ (1 + \cos t) \cos[\omega(y_1 - g_1(t))] & (\lambda - \sin t) + \cos[\omega(y_2 - g_2(t))] \end{pmatrix}.\tag{4.6}$$

Die Motivation für Experimente mit dieser Gleichung ist durch Report Nr. 58/84 [2] gegeben, da dort Experimente mit dieser Gleichung mittels IDeC-Verfahren mit der IMR und dem impliziten Eulerverfahren als Basisverfahren durchgeführt wurden. Die dort durchgeführten Experimente wurden unter anderem auch zu Testzwecken unseres IDeC-Codes wiederholt (siehe Tabellen 22a, 22c und 23c). Da von diesem Beispiel noch keine B-Konvergenz-Resultate mit der ITR als Basisverfahren bekannt sind, waren die dementsprechenden Experimente von besonderem Interesse. Um die Resultate mit denen der IMR als Basisverfahren vergleichen zu können, wurden sie unter denselben Bedingungen durchgeführt.

Im Gegensatz zu Testproblem 1 wurden nicht die Stützpunkte der IDeC vorher fixiert, sondern es wurde bei allen Varianten der IDeC die Schrittweite h auf dem größten Gitter von vornherein festgelegt. Dies bedingt, daß man bei Vergleich von Verfahren zwischen jenen, bei denen jeder Punkt interpoliert wird, und jenen, bei denen nur jeder 2. Punkt interpoliert wird, die äquivalenten Tabellen (z. B. 22b und 23b) vergleichen kann.

4.2.2. Experimente mit Testproblem 2

Die angegebenen Tabellen zeigen Fehlernormen und Ordnungen jeweils an einer festen Stelle, wobei jeweils ein Parameter (λ oder ω) variiert und der andere konstant gehalten wird. Da das Basisverfahren nicht von der Interpolationsvariante abhängt, sondern nur von der gewählten Schrittweite, wären die entsprechenden Tabellen identisch — sie wurden daher nur einmal ausgegeben. Die Zusammenstellung der Tabellen erfolgte so, daß die Varianten mit Interpolation an jedem Punkt / an jedem zweiten Punkt direkt verglichen werden können.

Bei allen Experimenten wurde die GVS verwendet.

a) Experimente mit Variation von λ

Bei den folgenden Tabellen wurde jeweils $\omega = 1$ gesetzt (moderate für Nichtlinearität). λ wurde, ausgehend vom nichtsteifen Fall mit $\lambda = -1$ immer um eine Zehnerpotenz erhöht, bis der steife Fall mit $\lambda = -10^7$ erreicht wurde. Die Tabellen zeigen die Ergebnisse der Experimente an der Stelle $t = 1$.

- Für die Tabellen 20a – 20c wurden die Experimente mit der ITR als Basisverfahren durchgeführt, wobei jeder Punkt interpoliert wurde. In Tabelle 20a erkennt man die klassischen Ordnungen des Basisverfahrens. Während Tabelle 20b zeigt, daß beim 1. IDeC-Schritt wiederum die klassischen Ordnungen auftreten, zeichnen sich in Tabelle 20c (2. IDeC-Schritt) im mittelsteifen Fall Störungen der Ordnungen.
- Die Tabellen 21a – 21c zeigen die Experimente von vorhin, wobei jedoch jeder zweite Punkt interpoliert wurde. Die Störungen der Ordnungen im mittelsteifen Fall beim 2. IDeC-Schritt sind nicht mehr beobachtbar.
- Bei den Tabellen 22a - 22c wurden die Experimente mit der IMR als Basisverfahren durchgeführt, bei denen jeder Punkt interpoliert wurde. Dieses Experiment diente u. a. zu Testzwecken des IDeC-Codes. Die Tabellen 22a und 22c zeigen die entsprechenden Tabellen in [1] (Tabellen 2a und 3) bis auf Rundungsfehler. Bei Betrachten der Tabellen 21b und 21c des 1. bzw. 2. IDeC-Schrittes fällt auf, daß im steifen Fall die Ordnungen auf das Ordnungsniveau des Basisverfahrens zurückfallen. Im stark steifen Fall fällt das Fehlerniveau beim 2. IDeC-Schritt sogar hinter das des Basisverfahrens zurück.
- Die Tabellen 23a – 23c zeigen dasselbe Experiment, wobei jedoch jeder 2. Punkt interpoliert wurde. Dieses Experiment diente ebenfalls u. a. zu Testzwecken des IDeC-Codes. Anhand der Tabellen 23b und 23c erkennt man, daß das IDeC-Verfahren mit dieser Varianten wirksam ist. Man erkennt deutlich die klassischen Ordnungen der IDeC-Schritte.

- Vergleich ITR — IMR

Beim Basisverfahren zeigt die ITR ein etwa um eine Zehnerpotenz besseres Fehlerniveau als die IMR. Während bei den IDeC-Varianten, bei denen jeder Punkt interpoliert wurde, die Variante mit der IMR als Basisverfahren im steifen Fall die IDeC-Schritte auf die Ordnungen der IMR zurückfallen, zeigen sich bei der Variante mit der ITR als Basisverfahren lediglich im mittelsteifen Fall Ordnungsstörungen. Das Fehlerniveau ist bei den IDeC-Varianten mit der ITR als Basisverfahren ebenfalls etwas besser als bei der IMR, falls jeder zweite Punkt interpoliert wurde.

- Vergleich der Interpolationsvarianten

Da alle Experimente auf demselben Gitter durchgeführt wurden und das Basisverfahren nur vom Gitter (von der Schrittweite h) abhängt, nicht aber von der Art der Interpolation, sind die Tabellen für das Basisverfahren bei beiden Interpolationsvarianten identisch — sie wurden daher nur einmal angeführt (d. h. Tabelle 20a \equiv Tabelle 21a und Tabelle 22a \equiv Tabelle 23a). Während im nichtsteifen Fall bei den IDeC-Verfahren mit der IMR als Basisverfahren bei beiden Interpolationsvarianten fast identische Fehlernormen zu beobachten sind, fällt das Fehlerniveau im steifen Fall deutlich ab (Rückfall auf Ordnung 2). Bei Verfahren mit der ITR als Basisverfahren sind bei beiden Interpolationsvarianten fast identische Fehlernormen beobachtbar!

- Résumé

Bei den IDeC-Algorithmen, bei denen die IMR als Basisverfahren gewählt wurde, zeigt sich bei der Variante, bei der jeder Punkt interpoliert wurde, ein deutlicher Abfall des Fehlerniveaus. Im stark steifen Fall fällt es sogar noch hinter dem des Basisverfahrens zurück. Die Ordnungen zeigen einen Rückfall auf das Niveau des Basisverfahrens. Falls nur jeder zweite Punkt interpoliert wurde, funktioniert die Defektkorrektur wieder. Es zeigen sich wieder die „klassischen“ Ordnungen. Bei den IDeC-Algorithmen, bei denen die ITR als Basisverfahren gewählt wurde, funktionieren interessanterweise *beide* Interpolationsverfahren. Als einzigen Unterschied erkennt man, daß die Ordnungen bei Interpolation von jedem Punkt im mittelsteifen Bereich beim 2. IDeC-Schritt nicht systematisch sind — hier ergibt sich ein Abfall des Fehlerniveaus gegenüber der Variante, bei der jeder zweite Punkt interpoliert wurde.

T R A P E Z R E G E L
 G L O B A L E VERBINDUNGSSTRATEGIE M = 6
 FIXE PARAMETER: OMEGA: 1.00E+00
 T: 1.00E+00

O R I G I N A L P R O B L E M

F E H L E R

H\LAMBD!	-1.00E+00	-1.00E+01	-1.00E+02	-1.00E+03	-1.00E+04	-1.00E+05	-1.00E+06	-1.00E+07
6.25E-02!	4.12E-04	7.58E-04	8.34E-04	8.40E-04	8.41E-04	8.41E-04	8.41E-04	8.41E-04
3.13E-02!	1.02E-04	1.89E-04	2.08E-04	2.09E-04	2.09E-04	2.09E-04	2.09E-04	2.09E-04
1.56E-02!	2.56E-05	4.71E-05	5.18E-05	5.22E-05	5.23E-05	5.23E-05	5.23E-05	5.23E-05
7.81E-03!	6.39E-06	1.18E-05	1.30E-05	1.31E-05	1.31E-05	1.31E-05	1.31E-05	1.31E-05
3.91E-03!	1.60E-06	2.94E-06	3.24E-06	3.26E-06	3.27E-06	3.27E-06	3.27E-06	3.27E-06
O R D N U N G E N								
6.25E-02!		2.01	2.01	2.01	2.01	2.01	2.01	2.01
3.13E-02!		2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
1.56E-02!		2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
7.81E-03!		2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
3.91E-03!		2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00

Tabelle 20a/21a

J E D E R PUNKT WIRD INTERPOLIERT

1 . N A C H B A R P R O B L E M

F E H L E R

H\LAMBD!	-1.00E+00	-1.00E+01	-1.00E+02	-1.00E+03	-1.00E+04	-1.00E+05	-1.00E+06	-1.00E+07
6.25E-02!	4.07E-06	5.35E-06	4.63E-06	4.54E-06	4.53E-06	4.52E-06	4.52E-06	4.52E-06
3.13E-02!	2.49E-07	3.30E-07	2.86E-07	2.80E-07	2.80E-07	2.80E-07	2.80E-07	2.80E-07
1.56E-02!	1.55E-08	2.05E-08	1.79E-08	1.75E-08	1.74E-08	1.74E-08	1.74E-08	1.74E-08
7.81E-03!	9.64E-10	1.28E-09	1.12E-09	1.09E-09	1.09E-09	1.09E-09	1.09E-09	1.09E-09
3.91E-03!	6.03E-11	8.01E-11	6.97E-11	6.82E-11	6.80E-11	6.80E-11	6.80E-11	6.80E-11
O R D N U N G E N								
6.25E-02!		4.03	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02
3.13E-02!		4.01	4.01	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00
1.56E-02!		4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00
7.81E-03!		4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00
3.91E-03!		4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00

Tabelle 20b

J E D E R Z W E I T E PUNKT WIRD INTERPOLIERT

1 . N A C H B A R P R O B L E M

F E H L E R

H\LAMBD!	-1.00E+00	-1.00E+01	-1.00E+02	-1.00E+03	-1.00E+04	-1.00E+05	-1.00E+06	-1.00E+07
6.25E-02!	4.09E-06	5.32E-06	4.60E-06	4.50E-06	4.49E-06	4.49E-06	4.49E-06	4.49E-06
3.13E-02!	2.48E-07	3.29E-07	2.86E-07	2.80E-07	2.79E-07	2.79E-07	2.79E-07	2.79E-07
1.56E-02!	1.54E-08	2.05E-08	1.79E-08	1.75E-08	1.74E-08	1.74E-08	1.74E-08	1.74E-08
7.81E-03!	9.64E-10	1.28E-09	1.12E-09	1.09E-09	1.09E-09	1.09E-09	1.09E-09	1.09E-09
3.91E-03!	6.02E-11	8.01E-11	6.97E-11	6.82E-11	6.80E-11	6.80E-11	6.80E-11	6.80E-11
O R D N U N G E N								
6.25E-02!		4.04	4.02	4.01	4.01	4.01	4.01	4.01
3.13E-02!		4.01	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00
1.56E-02!		4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00
7.81E-03!		4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00
3.91E-03!		4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00

Tabelle 21b

T R A P E Z R E G E L
 G L O B A L E VERBINDUNGSSTRATEGIE M = 6
 FIXE PARAMETER: OMEGA: 1.00E+00
 T: 1.00E+00

J E D E R PUNKT WIRD INTERPOLIERT
 2 . N A C H B A R P R O B L E M
 F E H L E R
 H\LAMBDA! -1.00E+00 -1.00E+01 -1.00E+02 -1.00E+03 -1.00E+04 -1.00E+05 -1.00E+06 -1.00E+07
 !
 6.25E-02! 6.36E-08 5.81E-08 3.32E-08 7.19E-08 3.86E-08 3.85E-08 3.84E-08 3.84E-08
 3.13E-02! 9.60E-10 8.85E-10 3.34E-10 1.51E-08 8.38E-10 5.88E-10 5.88E-10 5.88E-10
 1.56E-02! 1.49E-11 1.37E-11 8.47E-12 2.34E-12 6.15E-10 9.59E-12 9.14E-12 9.13E-12
 7.81E-03! 2.32E-13 2.14E-13 1.61E-13 3.87E-14 1.94E-11 7.04E-12 1.43E-13 1.43E-13
 3.91E-03! 3.62E-15 3.35E-15 2.61E-15 1.84E-16 1.21E-17 3.82E-12 4.05E-14 2.23E-15
 O R D N U N G E N
 6.25E-02! 6.05 6.04 6.63 2.25 5.51 6.03 6.03 6.03
 3.13E-02! 6.01 6.01 5.30 12.65 .46 5.94 6.01 6.01
 1.56E-02! 6.00 6.00 5.71 5.92 4.98 .45 5.99 6.00
 7.81E-03! 6.00 6.00 5.95 7.72 20.62 .88 1.82 6.00
 3.91E-03!

Tabelle 20c

J E D E R Z W E I T E PUNKT WIRD INTERPOLIERT
 2 . N A C H B A R P R O B L E M
 F E H L E R
 H\LAMBDA! -1.00E+00 -1.00E+01 -1.00E+02 -1.00E+03 -1.00E+04 -1.00E+05 -1.00E+06 -1.00E+07
 !
 6.25E-02! 6.01E-08 9.26E-08 8.34E-08 8.22E-08 8.21E-08 8.20E-08 8.20E-08 8.20E-08
 3.13E-02! 1.20E-09 1.47E-09 1.27E-09 1.25E-09 1.25E-09 1.25E-09 1.25E-09 1.25E-09
 1.56E-02! 1.92E-11 2.26E-11 1.88E-11 1.91E-11 1.90E-11 1.90E-11 1.90E-11 1.90E-11
 7.81E-03! 3.02E-13 3.53E-13 2.94E-13 2.97E-13 2.97E-13 2.96E-13 2.96E-13 2.96E-13
 3.91E-03! 4.72E-15 5.50E-15 4.86E-15 4.62E-15 4.62E-15 4.62E-15 4.62E-15 4.62E-15
 O R D N U N G E N
 6.25E-02! 5.65 5.98 6.04 6.04 6.04 6.04 6.04 6.04
 3.13E-02! 5.97 6.02 6.07 6.03 6.03 6.03 6.03 6.03
 1.56E-02! 5.99 6.00 6.00 6.00 6.00 6.00 6.00 6.00
 7.81E-03! 6.00 6.00 5.92 6.01 6.00 6.00 6.00 6.00
 3.91E-03!

Tabelle 21c

MITTELPUNKTSREGEL
 GLOBALE VERBINDUNGSSTRATEGIE M = 6
 FIXE PARAMETER: OMEGA: 1.00E+00
 T: 1.00E+00

ORIGINALPROBLEM

Fehler

H\LAMBD!	-1.00E+00	-1.00E+01	-1.00E+02	-1.00E+03	-1.00E+04	-1.00E+05	-1.00E+06	-1.00E+07
!								
6.25E-02!	1.83E-02	9.29E-03	6.65E-03	6.37E-03	6.35E-03	6.35E-03	6.35E-03	6.35E-03
3.13E-02!	4.52E-03	2.30E-03	1.65E-03	1.58E-03	1.58E-03	1.58E-03	1.58E-03	1.58E-03
1.56E-02!	1.13E-03	5.75E-04	4.12E-04	3.95E-04	3.93E-04	3.93E-04	3.94E-04	3.94E-04
7.81E-03!	2.81E-04	1.44E-04	1.03E-04	9.86E-05	9.82E-05	9.82E-05	9.83E-05	9.83E-05
3.91E-03!	7.03E-05	3.59E-05	2.58E-05	2.46E-05	2.45E-05	2.45E-05	2.46E-05	2.46E-05
ORDNUNGEN								
6.25E-02!								
3.13E-02!	2.02	2.01	2.01	2.01	2.01	2.01	2.01	2.01
1.56E-02!	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
7.81E-03!	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
3.91E-03!	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00

Tabelle 22/23a

JEDER PUNKT WIRD INTERPOLIERT

1. NACHBARPROBLEM

Fehler

H\LAMBD!	-1.00E+00	-1.00E+01	-1.00E+02	-1.00E+03	-1.00E+04	-1.00E+05	-1.00E+06	-1.00E+07
!								
6.25E-02!	3.19E-04	1.03E-04	6.15E-05	4.69E-04	2.92E-03	3.40E-03	3.45E-03	3.45E-03
3.13E-02!	1.95E-05	6.36E-06	3.74E-06	2.54E-05	4.17E-04	8.06E-04	8.57E-04	8.63E-04
1.56E-02!	1.21E-06	3.96E-07	2.32E-07	2.19E-07	2.12E-06	1.64E-04	2.10E-04	2.15E-04
7.81E-03!	7.57E-08	2.47E-08	1.44E-08	1.36E-08	2.54E-07	1.50E-05	4.84E-05	5.34E-05
3.91E-03!	4.73E-09	1.54E-09	9.02E-10	8.43E-10	8.45E-10	6.85E-07	8.61E-06	1.29E-05
ORDNUNGEN								
6.25E-02!								
3.13E-02!	4.03	4.02	4.04	4.21	2.81	2.08	2.01	2.00
1.56E-02!	4.01	4.01	4.01	6.85	7.62	2.30	2.03	2.00
7.81E-03!	4.00	4.00	4.00	4.02	3.07	3.36	2.12	2.01
3.91E-03!	4.00	4.00	4.00	4.01	8.23	4.55	2.49	2.05

Tabelle 22b

JEDER ZWEITE PUNKT WIRD INTERPOLIERT

1. NACHBARPROBLEM

Fehler

H\LAMBD!	-1.00E+00	-1.00E+01	-1.00E+02	-1.00E+03	-1.00E+04	-1.00E+05	-1.00E+06	-1.00E+07
!								
6.25E-02!	3.18E-04	1.03E-04	6.01E-05	5.60E-05	5.56E-05	5.55E-05	5.55E-05	5.55E-05
3.13E-02!	1.95E-05	6.36E-06	3.71E-06	3.46E-06	3.43E-06	3.43E-06	3.43E-06	3.43E-06
1.56E-02!	1.21E-06	3.96E-07	2.32E-07	2.15E-07	2.14E-07	2.14E-07	2.14E-07	2.14E-07
7.81E-03!	7.57E-08	2.47E-08	1.45E-08	1.35E-08	1.34E-08	1.33E-08	1.33E-08	1.33E-08
3.91E-03!	4.73E-09	1.54E-09	9.02E-10	8.41E-10	8.35E-10	8.34E-10	8.34E-10	8.34E-10
ORDNUNGEN								
6.25E-02!								
3.13E-02!	4.03	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02
1.56E-02!	4.01	4.01	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00
7.81E-03!	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00
3.91E-03!	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00

Tabelle 23b

MITTELPUNKTSREGEL
 GLOBALE VERBINDUNGSSTRATEGIE M = 6
 FIXE PARAMETER: OMEGA: 1.00E+00
 T: 1.00E+00

JEDER PUNKT WIRD INTERPOLIERT
 2. NACHBARPROBLEME
 FEHLER
 H\LAMBDA! -1.00E+00 -1.00E+01 -1.00E+02 -1.00E+03 -1.00E+04 -1.00E+05 -1.00E+06 -1.00E+07
 !
 6.25E-02! 6.04E-05 1.07E-06 1.70E-05 9.42E-04 2.45E-02 3.05E-02 3.11E-02 3.12E-02
 3.13E-02! 7.62E-08 1.64E-08 4.01E-08 8.73E-05 2.43E-03 7.06E-03 7.73E-03 7.79E-03
 1.56E-02! 1.18E-09 2.54E-10 2.24E-10 6.67E-09 2.23E-04 1.30E-03 1.88E-03 1.94E-03
 7.81E-03! 1.84E-11 3.97E-12 1.68E-12 3.13E-12 1.52E-06 5.14E-05 4.16E-04 4.80E-04
 3.91E-03! 2.88E-13 6.20E-14 2.64E-14 1.65E-12 2.24E-11 8.52E-06 6.19E-05 1.15E-04
 ORDNUMMEN
 6.25E-02! 6.05 6.03 8.72 3.43 3.34 2.11 2.01 2.00
 3.13E-02! 6.01 6.01 7.48 13.68 3.44 2.44 2.04 2.00
 1.56E-02! 6.00 6.00 7.06 11.06 7.20 4.66 2.17 2.02
 7.81E-03! 6.00 6.00 5.99 .93 16.05 2.59 2.75 2.07
 3.91E-03!

Tabelle 22c

JEDER ZWEITE PUNKT WIRD INTERPOLIERT
 2. NACHBARPROBLEME
 FEHLER
 H\LAMBDA! -1.00E+00 -1.00E+01 -1.00E+02 -1.00E+03 -1.00E+04 -1.00E+05 -1.00E+06 -1.00E+07
 !
 6.25E-02! 5.04E-06 1.05E-06 4.83E-07 4.35E-07 4.31E-07 4.31E-07 4.31E-07 4.31E-07
 3.13E-02! 7.61E-08 1.60E-08 7.60E-09 6.70E-09 6.64E-09 6.64E-09 6.64E-09 6.64E-09
 1.56E-02! 1.18E-09 2.49E-10 1.63E-10 1.05E-10 1.04E-10 1.04E-10 1.04E-10 1.04E-10
 7.81E-03! 1.84E-11 3.89E-12 2.44E-12 1.63E-12 1.62E-12 1.62E-12 1.62E-12 1.62E-12
 3.91E-03! 2.87E-13 6.08E-14 2.54E-14 2.57E-14 2.53E-14 2.53E-14 2.53E-14 2.53E-14
 ORDNUMMEN
 6.25E-02! 6.05 6.04 5.99 6.02 6.02 6.02 6.02 6.02
 3.13E-02! 6.01 6.01 5.55 6.00 6.00 6.00 6.00 6.00
 1.56E-02! 6.00 6.00 6.06 6.01 6.00 6.00 6.00 6.00
 7.81E-03! 6.00 6.00 6.59 5.98 6.00 6.00 6.00 6.00
 3.91E-03!

Tabelle 23c

b) Experimente mit Variation von ω

Bei den folgenden Tabellen wurde $\lambda = -10^5$ als fixer Parameter gewählt. Die Nichtlinearität wurde durch Erhöhen von ω entsprechend den Werten von im Report Nr. 58/84 [2] durchgeführten Experimenten gewählt. Die Tabellen wurden für $t = 1$ erstellt.

- Für die Tabellen 24a – 24c wurden die Experimente mit der ITR durchgeführt. Es wurde dabei jeder Punkt interpoliert. Während das Basisverfahren bei allen Experimenten noch die klassischen Ordnungen zeigt, zeigt sich schon beim 1. IDeC-Schritt ein immer unregelmäßigeres Verhalten der Ordnungen. Die Ordnungen stellen sich dann erst bei feinerem Gitter wieder ein. Beim 2. IDeC-Schritt zeigt sich bei allen Experimenten, daß ab einer gewissen Feinheit des Gitters das Fehlerniveau nicht mehr besser wird (siehe Tabelle 24c).
- Die Tabellen 25a – 25c zeigen dieselben Experimenten, wobei jedoch jeder zweite Punkt interpoliert wurde. Es zeigt sich ebenso wie vorhin, daß bei Erhöhen der Nichtlinearität die Ordnungen immer weiter von den klassischen Ordnungen abweichen. Das Fehlerniveau wird aber im Gegensatz zu vorhin auch beim 2. IDeC-Schritt immer besser.
- Die Tabellen 26a – 26c zeigen die Experimente mit der IMR als Basisverfahren, wobei jeder Punkt interpoliert wurde. Man merkt hier deutlich den Abfall bei den IDeC-Schritten auf das Ordnungsniveau des Basisverfahrens, der bei steifen Problemen schon zuvor beobachtet wurde.
- Die Tabellen 27a – 27c zeigen dieselben Experimente wie zuvor, wobei jedoch jeder zweite Punkt interpoliert wurde. Hier ist erkennbar, daß diese Variante der IDeC wieder funktioniert. Man erkennt hier wieder die unregelmäßigeren Ordnungen bei hoher Nichtlinearität.

● Vergleich ITR — IMR

Beim Vergleich der Tabellen, bei denen die ITR als Basisverfahren gewählt wurde und der Tabellen, bei denen die IMR gewählt wurde, fällt einem als erstes auf, daß bei der IMR nur Ergebnisse mit niedrigerem ω angegeben sind. Dies kommt daher, daß bei hohem ω das Newton-Verfahren bei der IMR immer schlechter funktioniert und bei höherem ω (3.20) nicht mehr erfüllt wird. Daran ist erkennbar, daß bei höherer Nichtlinearität IDeC-Verfahren mit der IMR als Basisverfahren einen höheren Aufwand erfordern als IDeC-Verfahren mit der ITR als Basisverfahren. Allgemein ist zu sagen, daß das Fehlerniveau bei den Verfahren mit der ITR als Basisverfahren besser ist als bei jenen mit der IMR als Basisverfahren. Falls nur jeder Punkt interpoliert wurde, fällt man bei den IDeC-Verfahren basierend auf der IMR sogar auf das Fehlerniveau des Basisverfahrens zurück. Man sollte daher bei diesem Gleichungssystem die ITR vorziehen.

● Vergleich der Interpolationsvarianten

Aufgrund der Wahl der Schrittweite sind die Tabellen des Basisverfahrens bei beiden Interpolationsvarianten identisch und wurden daher nur einmal angeführt (vgl. a)). Man erkennt, daß bei Interpolation von jedem zweiten Punkt bei IDeC-Verfahren mit der ITR als Basisverfahren bei den IDeC-Schritten meis-

tens ein etwas besseres Fehlerniveau herrscht. Während bei Verfeinern des Gitters im Fall der Interpolation an jedem Punkt das Fehlerniveau stagniert, passiert dies bei Interpolation an jedem zweiten Punkt nicht. Bei Verfahren mit der IMR als Basisverfahren ist bei Interpolation an jedem Punkt ein Abfall der Ordnungen auf das Basisverfahren erkennbar, was bei Interpolation an jedem zweiten Punkt nicht auftritt; es ist daher auch bei Interpolation an jedem zweiten Punkt ein besseres Fehlerniveau festzustellen. Bei diesem Gleichungssystem sollte man daher die Interpolation an jedem zweiten Punkt vorziehen.

T R A P E Z R E G E L
 G L O B A L E VERBINDUNGSSTRATEGIE M = 6
 FIXE PARAMETER: LAMBDA: -1.00E+05
 T: 1.00E+00

O R I G I N A L P R O B L E M

F E H L E R

H\OMEGA !	3.00E+00	2.25E+01	1.13E+02	2.93E+02	5.01E+02	6.78E+02	8.04E+02	8.85E+02
!								
6.25E-02!	8.41E-04	8.41E-04	8.41E-04	8.39E-04	8.36E-04	8.32E-04	8.29E-04	8.27E-04
3.12E-02!	2.09E-04	2.09E-04	2.09E-04	2.09E-04	2.09E-04	2.09E-04	2.09E-04	2.09E-04
1.56E-02!	5.23E-05	5.23E-05	5.23E-05	5.23E-05	5.23E-05	5.23E-05	5.23E-05	5.23E-05
7.81E-03!	1.31E-05	1.31E-05	1.31E-05	1.31E-05	1.31E-05	1.31E-05	1.31E-05	1.31E-05
3.91E-03!	3.27E-06	3.27E-06	3.27E-06	3.27E-06	3.27E-06	3.27E-06	3.27E-06	3.27E-06
O R D N U N G E N								
6.25E-02!								
3.13E-02!	2.01	2.01	2.01	2.00	2.00	1.99	1.99	1.98
1.56E-02!	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
7.81E-03!	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
3.91E-03!	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00

Tabelle 24a/25a

J E D E R PUNKT WIRD INTERPOLIERT

1 . N A C H B A R P R O B L E M

F E H L E R

H\OMEGA !	3.00E+00	2.25E+01	1.13E+02	2.93E+02	5.01E+02	6.78E+02	8.04E+02	8.85E+02
!								
6.25E-02!	4.52E-06	4.47E-06	3.06E-06	5.11E-06	2.25E-05	4.24E-05	5.67E-06	6.97E-05
3.13E-02!	2.80E-07	2.79E-07	2.58E-07	1.32E-07	1.50E-07	5.04E-07	8.19E-07	1.05E-06
1.56E-02!	1.74E-08	1.74E-08	1.71E-08	1.51E-08	1.08E-08	5.23E-09	2.85E-10	3.34E-09
7.81E-03!	1.09E-09	1.09E-09	1.08E-09	1.05E-09	9.85E-10	8.98E-10	8.21E-10	7.65E-10
3.91E-03!	6.80E-11	6.80E-11	6.80E-11	6.75E-11	6.64E-11	6.51E-11	6.39E-11	6.30E-11
O R D N U N G E N								
6.25E-02!								
3.13E-02!	4.02	4.00	3.57	5.27	7.23	6.40	6.16	6.05
1.56E-02!	4.00	4.00	3.91	3.13	3.80	6.59	11.49	8.20
7.81E-03!	4.00	4.00	3.98	3.85	3.45	2.54	-1.52	2.13
3.91E-03!	4.00	4.00	3.99	3.96	3.89	3.79	3.68	3.60

Tabelle 24b

J E D E R Z W E I T E PUNKT WIRD INTERPOLIERT

1 . N A C H B A R P R O B L E M

F E H L E R

H\OMEGA !	3.00E+00	2.25E+01	1.13E+02	2.93E+02	5.01E+02	6.78E+02	8.04E+02	8.85E+02
!								
6.25E-02!	4.49E-06	4.43E-06	3.03E-06	5.14E-05	2.25E-05	4.25E-05	5.87E-05	6.98E-05
3.13E-02!	2.79E-07	2.78E-07	2.57E-07	1.32E-07	1.50E-07	5.05E-07	8.20E-07	1.05E-06
1.86E-02!	1.74E-08	1.74E-08	1.71E-08	1.51E-08	1.08E-08	5.22E-09	2.73E-10	3.35E-09
7.81E-03!	1.09E-09	1.09E-09	1.08E-09	1.05E-09	9.84E-10	8.98E-10	8.21E-10	7.64E-10
3.91E-03!	6.80E-11	6.80E-11	6.79E-11	6.75E-11	6.64E-11	6.50E-11	6.38E-11	6.30E-11
O R D N U N G E N								
6.25E-02!								
3.13E-02!	4.01	3.99	3.56	5.29	7.23	6.40	6.16	6.06
1.56E-02!	4.00	4.00	3.91	3.12	3.81	6.59	11.55	8.29
7.81E-03!	4.00	4.00	3.98	3.85	3.45	2.54	-1.59	2.13
3.91E-03!	4.00	4.00	3.99	3.96	3.89	3.79	3.68	3.60

Tabelle 25b

T R A P E Z R E G E L
 G L O B A L E VERBINDUNGSSTRATEGIE M = 6
 FIXE PARAMETER: LAMBDA: -1.00E+05
 T: 1.00E+00

J E D E R PUNKT WIRD INTERPOLIERT
 2 . N A C H B A R P R O B L E M
 F E H L E R
 H\OMEGA ! 3.00E+00 2.25E+01 1.13E+02 2.93E+02 5.01E+02 6.78E+02 8.04E+02 8.85E+02
 !
 6.25E-02! 3.84E-08 3.66E-08 7.13E-09 2.31E-07 5.17E-07 4.94E-07 1.60E-07 2.46E-07
 3.13E-02! 5.88E-10 5.82E-10 4.14E-10 5.56E-10 2.59E-09 4.85E-09 6.58E-09 7.68E-09
 1.56E-02! 9.58E-12 9.56E-12 8.94E-12 5.41E-12 4.70E-12 1.46E-11 2.36E-11 3.02E-11
 7.81E-03! 7.04E-12 7.04E-12 7.04E-12 7.04E-12 7.04E-12 7.04E-12 7.04E-12 7.04E-12
 3.91E-03! 3.82E-12 3.82E-12 3.82E-12 3.82E-12 3.82E-12 3.82E-12 3.82E-12 3.82E-12
 O R D N U N G E N
 6.25E-02! 6.03 5.98 4.10 8.70 7.64 6.67 4.60 5.00
 3.13E-02! 5.94 5.93 5.53 6.68 9.11 8.38 8.12 7.99
 1.56E-02! .45 .44 .34 -.38 -.58 1.05 1.75 2.10
 7.81E-03! .88 .88 .88 .88 .88 .88 .88 .88
 3.91E-03!

Tabelle 24c

J E D E R Z W E I T E PUNKT WIRD INTERPOLIERT
 2 . N A C H B A R P R O B L E M
 F E H L E R
 H\OMEGA ! 3.00E+00 2.25E+01 1.13E+02 2.93E+02 5.01E+02 6.78E+02 8.04E+02 8.85E+02
 !
 6.25E-02! 8.20E-08 8.07E-08 4.37E-08 2.21E-07 5.61E-07 3.90E-07 1.06E-07 6.06E-07
 3.13E-02! 1.25E-09 1.24E-09 1.07E-09 1.09E-10 1.91E-09 4.16E-09 5.89E-09 6.97E-09
 1.56E-02! 1.90E-11 1.90E-11 1.84E-11 1.45E-11 6.01E-12 4.49E-12 1.36E-11 2.02E-11
 7.81E-03! 2.96E-13 2.96E-13 2.94E-13 2.79E-13 2.45E-13 2.03E-13 1.65E-13 1.37E-13
 3.91E-03! 4.62E-15 4.62E-15 4.61E-15 4.55E-15 4.42E-15 4.25E-15 4.10E-15 3.99E-15
 O R D N U N G E N
 6.25E-02! 6.04 6.02 5.35 10.99 8.19 6.55 4.18 6.44
 3.13E-02! 6.03 6.03 5.87 2.90 8.32 9.86 8.75 8.43
 1.56E-02! 6.00 6.00 5.97 5.70 4.62 4.47 6.37 7.20
 7.81E-03! 6.00 6.00 5.99 5.94 5.79 5.57 5.33 5.10
 3.81E-03!

Tabelle 25c

MITTELPUNKTSREGEL
 GLOBALE VERBINDUNGSSTRATEGIE M = 6
 FIXE PARAMETER: LAMBDA: -1.00E+05
 T: 1.00E+00

ORIGINALPROBLEM
 FEHLER
 H\OMEGA ! 3.00E+00 2.25E+01 1.13E+02
 !
 6.25E-02! 6.35E-03 6.34E-03 6.23E-03
 3.13E-02! 1.58E-03 1.58E-03 1.57E-03
 1.56E-02! 3.93E-04 3.93E-03 3.93E-04
 7.81E-03! 9.82E-05 9.82E-05 9.82E-05
 3.91E-03! 2.45E-05 2.45E-05 2.45E-05
 ORDNUNGEN
 6.25E-02!
 3.13E-02! 2.01 2.01 1.98
 1.56E-02! 2.00 2.00 2.00
 7.81E-03! 2.00 2.00 2.00
 3.91E-03! 2.00 2.00 2.00

Tabelle 26a/27a

JEDER PUNKT WIRD INTERPOLIERT
 1. NACHBARPROBLEM
 FEHLER
 H\OMEGA ! 3.00E+00 2.25E+01 1.13E+02
 !
 6.25E-02! 3.40E-03 3.40E-03 3.43E-03
 3.13E-02! 8.06E-04 8.06E-04 8.06E-04
 1.56E-02! 1.64E-04 1.64E-04 1.64E-04
 7.81E-03! 1.60E-05 1.60E-05 1.60E-05
 3.91E-03! 6.85E-07 6.85E-07 6.85E-07
 ORDNUNGEN
 6.25E-02!
 3.13E-02! 2.08 2.08 2.09
 1.56E-02! 2.30 2.30 2.30
 7.81E-03! 3.36 3.36 3.36
 3.91E-03! 4.55 4.55 4.55

Tabelle 26b

JEDER ZWEITE PUNKT WIRD INTERPOLIERT
 1. NACHBARPROBLEM
 FEHLER
 H\OMEGA ! 3.00E+00 2.25E+01 1.13E+02
 !
 6.25E-02! 5.51E-05 3.07E-05 4.69E-04
 3.13E-02! 3.42E-06 3.05E-06 5.96E-06
 1.56E-02! 2.14E-07 2.08E-07 6.67E-08
 7.81E-03! 1.33E-08 1.33E-08 1.11E-08
 3.91E-03! 8.34E-10 8.33E-10 7.98E-10
 ORDNUNGEN
 6.25E-02!
 3.13E-02! 4.01 3.33 6.30
 1.56E-02! 4.00 3.88 6.48
 7.81E-03! 4.00 3.97 2.59
 3.91E-03! 4.00 3.99 3.79

Tabelle 27b

M I T T E L P U N K T S R E G E L
 G L O B A L E V E R B I N D U N G S S T R A T E G I E M = 6
 F I X E P A R A M E T E R : L A M B D A : - 1 . 0 0 E + 0 5
 T : 1 . 0 0 E + 0 0

J E D E R P U N K T W I R D I N T E R P O L I E R T
 2 . N A C H B A R P R O B L E M
 F E H L E R
 H \ O M E G A ! 3 . 0 0 E + 0 0 2 . 2 5 E + 0 1 1 . 1 3 E + 0 2
 !
 6 . 2 5 E - 0 2 ! 3 . 0 5 E - 0 2 3 . 0 5 E - 0 2 3 . 0 5 E - 0 2
 3 . 1 3 E - 0 2 ! 7 . 0 6 E - 0 3 7 . 0 6 E - 0 3 7 . 0 6 E - 0 3
 1 . 5 6 E - 0 2 ! 1 . 3 0 E - 0 3 1 . 3 0 E - 0 3 1 . 3 0 E - 0 3
 7 . 8 1 E - 0 3 ! 5 . 1 4 E - 0 5 5 . 1 4 E - 0 5 5 . 1 4 E - 0 5
 3 . 9 1 E - 0 3 ! 8 . 5 2 E - 0 6 8 . 5 2 E - 0 6 8 . 5 2 E - 0 6
 O R D N U N G E N
 6 . 2 5 E - 0 2 !
 3 . 1 3 E - 0 2 ! 2 . 1 1 2 . 1 1 2 . 1 1
 1 . 5 6 E - 0 2 ! 2 . 4 4 2 . 4 4 2 . 4 4
 7 . 8 1 E - 0 2 ! 4 . 6 6 4 . 6 6 4 . 6 6
 3 . 9 1 E - 0 3 ! 2 . 5 9 2 . 5 9 2 . 5 9

Tabelle 26c

J E D E R Z W E I T E P U N K T W I R D I N T E R P O L I E R T
 2 . N A C H B A R P R O B L E M
 F E H L E R
 H \ O M E G A ! 3 . 0 0 E + 0 0 2 . 2 5 E + 0 1 1 . 1 3 E + 0 2
 !
 6 . 2 5 E - 0 2 ! 4 . 2 6 E - 0 7 3 . 2 7 E - 0 7 8 . 9 7 E - 0 6
 3 . 1 3 E - 0 2 ! 6 . 6 3 E - 0 9 6 . 2 8 E - 0 9 1 . 1 9 E - 0 8
 1 . 5 6 E - 0 2 ! 1 . 0 4 E - 1 0 1 . 0 2 E - 1 0 8 . 2 3 E - 1 1
 7 . 8 1 E - 0 3 ! 1 . 6 2 E - 1 2 1 . 6 1 E - 1 2 1 . 4 9 E - 1 2
 3 . 9 1 E - 0 3 ! 2 . 5 3 E - 1 4 2 . 5 2 E - 1 4 2 . 4 7 E - 1 4
 O R D N U N G E N
 6 . 2 5 E - 0 2 !
 3 . 1 3 E - 0 2 ! 6 . 0 1 5 . 7 0 9 . 5 6
 1 . 5 6 E - 0 2 ! 6 . 0 0 5 . 9 4 7 . 1 7
 7 . 8 1 E - 0 3 ! 6 . 0 0 5 . 9 9 5 . 7 9
 3 . 9 1 E - 0 3 ! 6 . 0 0 6 . 0 0 5 . 9 2

Tabelle 27c

4.3. Testproblem 3

4.3.1. Beschreibung von Testproblem 3

Dieses Beispiel ist wiederum ein System von zwei Gleichungen 1. Ordnung:

$$\begin{aligned}y_1' &= y_1 + y_2^\alpha & y_1(0) &= 1 \\y_2' &= \lambda y_2 + e^{-t} & y_2(0) &= -\frac{1}{1+\lambda} \\ \alpha &\geq 1 & \lambda &\in [-\infty, -2].\end{aligned}\tag{4.7}$$

Die exakte Lösung von (4.7) lautet

$$\begin{aligned}y_1(t) &= e^t + \frac{e^t - e^{-\alpha t}}{(\alpha + 1)[-(\lambda + 1)]^\alpha} \\y_2(t) &= \frac{-e^{-t}}{\lambda + 1}, \quad t \in [0, T].\end{aligned}\tag{4.8}$$

Die Jacobi-Matrix von (4.7) lautet

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \alpha y_2^{\alpha-1} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},\tag{4.9}$$

d. h., die Eigenwerte von J sind 1 und λ . Durch λ wird daher die Steifheit von (4.7) geregelt. Durch α wird die Nichtlinearität von (4.7) geregelt. Falls $\alpha = 1$ gesetzt wurde, hat man den Spezialfall eines linearen Systems.

4.3.2. Experimente mit Testproblem 3

Ebenso wie bei Testproblem 2 wurden auch hier Tabellen ausgegeben, bei denen ein Parameter variiert wurde und der andere fixiert wurde. Die Verbindung zwischen den Intervallen erfolgte durch die Globale Verbindungsstrategie. Die Lösung des Gleichungssystems erfolgte auf dem Intervall $[0, 1]$. die Interpolation erfolgte durch Polynome vom Grad 6. Bei der Lösung der Differentialgleichung auf dem größten Gitter erfolgte keine Verbindungsstrategie; d. h., daß das gesamte Intervall $[0, 1]$ interpoliert wurde. Es wurden Experimente durchgeführt, bei denen α fix gehalten wurde ($\alpha = 1$ und $\alpha = 10$; λ wurde von -2 bis -10^7 variiert, wobei für λ die dazwischenliegenden Zehnerpotenzen gewählt wurden. Es wurde jeder Punkt interpoliert. Die Ausgabe der Tabellen erfolgte für $t = 1$.

- Die Tabellen 28a – 28c zeigen die Experimente mit der ITR als Basisverfahren, wobei $\alpha = 1$ gewählt wurde. Die Tabellen zeigen die klassischen Ordnungen. Besonders die steifen Probleme zeigen ein fast identisches Fehlerniveau.
- Die Tabellen 29a – 29c zeigen das analoge Experiment mit der IMR als Basisverfahren. Während das Basisverfahren noch schöne Ordnungen zeigt, bemerkt

man schon beim 1. IDeC-Schritt eine geringe Unsystematik im steifen Fall. Beim 2. IDeC-Schritt verstärkt sich diese noch. Im mittelsteifen Fall bemerkt man einen Einbruch des Fehlerniveaus.

- Die Tabellen 30a – 30c zeigen die Experimente mit der ITR als Basisverfahren, wobei $\alpha = 10$ gewählt wurde. Die Tabellen zeigen fast analoge Werte wie die Tabellen 28a – 28c, jedoch für $\lambda = -2$ zeigen sich unregelmäßige Ordnungen.
- Die Tabellen 31a – 31c zeigen das analoge Experiment von vorhin mit der IMR als Basisverfahren. Es zeigen sich auch hier unregelmäßige Ordnungen für $\lambda = -2$.
- Vergleich ITR — IMR

Im Gegensatz zu den anderen Beispielen sind hier die ITR und die IMR im stark steifen Fall gleich gut, obwohl jeweils *jeder* Punkt interpoliert wurde. Dies liegt vermutlich in der Tatsache begründet, daß bei dem vorliegenden Beispiel der Fehler in der zweiten Komponente bei *beiden* Verfahren einen ε -Faktor aufweist (diese Eigenschaft ist auch inzwischen theoretisch geklärt). Meistens zeigt die IMR ein besseres Fehlerniveau. Im mittelsteifen Fall ergeben sich bei der IMR Ordnungsreduktionen (allerdings erst beim 2. Defektkorrekturschritt), aber kein totales Zusammenbrechen des Fehlerniveaus, wie bei den früheren Beispielen (vgl. Tabellen 7a – 7c). Ein ähnlicher Effekt ist bei der Trapezregel nicht zu beobachten. Bei einigen Experimenten mit der IMR als Basisverfahren passierte es, daß man bei der Lösung der Differentialgleichungen aus dem Definitionsbereich geriet (y_2 negativ), wobei es jedoch bei den Experimenten mit der ITR als Basisverfahren keine numerischen Schwierigkeiten gab.

T R A P E Z R E G E L
 G L O B A L E VERBINDUNGSSTRATEGIE J E D E R PUNKT WIRD INTERPOLIERT M = 6
 FIXE PARAMETER: ALPHA: 1.00E+00
 T: 1.00E+00

O R I G I N A L P R O B L E M

F E H L E R

H\LAMBD A! -2.00E+00 -1.00E+01 -1.00E+02 -1.00E+03 -1.00E+04 -1.00E+05 -1.00E+06 -1.00E+07
 !
 1.67E-01! 1.01E-02 6.80E-03 6.37E-03 6.33E-03 6.33E-03 6.33E-03 6.33E-03 6.33E-03
 8.33E-02! 2.52E-03 1.69E-03 1.59E-03 1.58E-03 1.58E-03 1.58E-03 1.58E-03 1.58E-03
 4.17E-02! 6.31E-04 4.23E-04 3.96E-04 3.94E-04 3.93E-04 3.93E-04 3.93E-04 3.93E-04
 2.08E-02! 1.58E-04 1.06E-04 9.90E-05 9.84E-05 9.83E-05 9.83E-05 9.83E-05 9.83E-05
 1.04E-02! 3.94E-05 2.64E-05 2.48E-05 2.46E-05 2.46E-05 2.46E-05 2.46E-05 2.46E-05

O R D N U N G E N

1.67E-01! 2.01 2.01 2.01 2.01 2.01 2.01 2.01 2.01
 8.33E-02! 2.00 2.00 2.00 2.00 2.00 2.00 2.00 2.00
 4.17E-02! 2.00 2.00 2.00 2.00 2.00 2.00 2.00 2.00
 2.08E-02! 2.00 2.00 2.00 2.00 2.00 2.00 2.00 2.00
 1.04E-02! 2.00 2.00 2.00 2.00 2.00 2.00 2.00 2.00

Tabelle 28a

1 . N A C H B A R P R O B L E M

F E H L E R

H\LAMBD A! -2.00E+00 -1.00E+01 -1.00E+02 -1.00E+03 -1.00E+04 -1.00E+05 -1.00E+06 -1.00E+07
 !
 1.67E-01! 7.91E-05 5.37E-05 5.08E-05 5.05E-05 5.05E-05 5.05E-05 5.05E-05 5.05E-05
 8.33E-02! 4.98E-06 3.39E-06 3.20E-06 3.18E-06 3.18E-06 3.18E-06 3.18E-06 3.18E-06
 4.17E-02! 3.12E-07 2.12E-07 2.00E-07 1.99E-07 1.99E-07 1.99E-07 1.99E-07 1.99E-07
 2.08E-02! 1.95E-08 1.33E-08 1.25E-08 1.25E-08 1.24E-08 1.24E-08 1.24E-08 1.24E-08
 1.04E-02! 1.22E-09 8.28E-10 7.83E-10 7.78E-10 7.78E-10 7.78E-10 7.78E-10 7.78E-10

O R D N U N G E N

1.67E-01! 3.99 3.99 3.99 3.99 3.99 3.99 3.99 3.99
 8.33E-02! 4.00 4.00 4.00 4.00 4.00 4.00 4.00 4.00
 4.17E-02! 4.00 4.00 4.00 4.00 4.00 4.00 4.00 4.00
 2.08E-02! 4.00 4.00 4.00 4.00 4.00 4.00 4.00 4.00
 1.04E-02! 4.00 4.00 4.00 4.00 4.00 4.00 4.00 4.00

Tabelle 28b

2 . N A C H B A R P R O B L E M

F E H L E R

H\LAMBD A! -2.00E+00 -1.00E+01 -1.00E+02 -1.00E+03 -1.00E+04 -1.00E+05 -1.00E+06 -1.00E+07
 !
 1.67E-01! 1.87E-06 1.25E-06 1.18E-06 1.17E-06 1.17E-06 1.17E-06 1.17E-06 1.17E-06
 8.33E-02! 2.78E-08 1.86E-08 2.11E-08 1.74E-08 1.74E-08 1.74E-08 1.74E-08 1.74E-08
 4.17E-02! 4.29E-10 2.87E-10 2.70E-10 2.76E-10 2.68E-10 2.68E-10 2.68E-10 2.68E-10
 2.08E-02! 6.68E-12 4.46E-12 4.20E-12 4.19E-12 4.18E-12 4.17E-12 4.17E-12 4.17E-12
 1.04E-02! 1.04E-13 6.97E-14 6.56E-14 6.52E-14 7.04E-14 6.52E-14 6.52E-14 6.52E-14

O R D N U N G E N

1.67E-01! 6.07 6.07 5.81 6.07 6.07 6.07 6.07 6.07
 8.33E-02! 6.02 6.02 6.29 5.98 6.02 6.02 6.02 6.02
 4.17E-02! 6.00 6.00 6.00 6.04 6.00 6.00 6.00 6.00
 2.08E-02! 6.00 6.00 6.00 6.01 5.89 6.00 6.00 6.00
 1.04E-02! 6.00 6.00 6.00 6.01 5.89 6.00 6.00 6.00

Tabelle 28c

MITTELPUNKTSREGEL
 GLOBALE VERBINDUNGSSTRATEGIE JEDER PUNKT WIRD INTERPOLIERT M = 6
 FIXE PARAMETER: ALPHA: 1.00E+00
 T: 1.00E+00

ORIGINALPROBLEM

FEHLER

H\LAMBDA!	-2.00E+00	-1.00E+01	-1.00E+02	-1.00E+03	-1.00E+04	-1.00E+05	-1.00E+06	-1.00E+07
!								
1.67E-01!	9.13E-03	6.45E-03	6.33E-03	6.33E-03	6.33E-03	6.33E-03	6.33E-03	6.33E-03
8.33E-02!	2.27E-03	1.60E-03	1.58E-03	1.58E-03	1.58E-03	1.58E-03	1.58E-03	1.58E-03
4.17E-02!	5.68E-04	4.01E-04	3.94E-04	3.93E-04	3.93E-04	3.93E-04	3.93E-04	3.93E-04
2.08E-02!	1.42E-04	1.00E-04	9.84E-05	9.83E-05	9.83E-05	9.83E-05	9.83E-05	9.83E-05
1.04E-02!	3.55E-05	2.50E-05	2.46E-05	2.46E-05	2.46E-05	2.46E-05	2.46E-05	2.46E-05
ORDNUNG								
1.67E-01!		2.01	2.01	2.01	2.01	2.01	2.01	2.01
8.33E-02!		2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
4.17E-02!		2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
2.08E-02!		2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
1.04E-02!		2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00

Tabelle 29a

1. NACHBARPROBLEM

FEHLER

H\LAMBDA!	-2.00E+00	-1.00E+01	-1.00E+02	-1.00E+03	-1.00E+04	-1.00E+05	-1.00E+06	-1.00E+07
!								
1.67E-01!	4.75E-05	3.29E-05	9.07E-05	3.02E-05	3.00E-05	3.00E-05	3.00E-05	3.00E-05
8.33E-02!	2.90E-06	1.93E-06	2.30E-06	2.60E-06	1.83E-06	1.83E-06	1.83E-06	1.83E-06
4.17E-02!	1.80E-07	1.20E-07	1.15E-07	3.49E-07	1.17E-07	1.14E-07	1.14E-07	1.14E-07
2.08E-02!	1.13E-08	7.48E-09	7.15E-09	7.13E-09	1.48E-08	7.12E-09	7.12E-09	7.12E-09
1.04E-02!	7.03E-10	4.67E-10	4.47E-10	4.45E-10	9.30E-10	4.98E-10	4.45E-10	4.45E-10
ORDNUNG								
1.67E-01!		4.03	4.09	5.30	3.54	4.03	4.03	4.03
8.33E-02!		4.01	4.01	4.33	2.90	3.97	4.01	4.01
4.17E-02!		4.00	4.00	4.00	5.61	2.98	4.00	4.00
2.08E-02!		4.00	4.00	4.00	4.00	3.99	3.84	4.00
1.04E-02!		4.00	4.00	4.00	4.00	3.99	3.84	4.00

Tabelle 29b

2. NACHBARPROBLEM

FEHLER

H\LAMBDA!	-2.00E+00	-1.00E+01	-1.00E+02	-1.00E+03	-1.00E+04	-1.00E+05	-1.00E+06	-1.00E+07
!								
1.67E-01!	8.99E-07	8.46E-07	4.67E-04	2.39E-05	6.17E-07	5.48E-07	5.48E-07	5.48E-07
8.33E-02!	1.24E-08	8.39E-09	1.41E-05	1.31E-05	2.68E-07	8.12E-09	7.59E-09	7.59E-09
4.17E-02!	1.88E-10	1.26E-10	1.16E-10	5.21E-07	2.11E-07	2.82E-09	1.19E-10	1.15E-10
2.08E-02!	2.91E-12	1.95E-12	1.80E-12	7.30E-09	7.69E-08	2.56E-09	2.87E-11	1.80E-12
1.04E-02!	4.53E-14	3.04E-14	2.80E-14	2.78E-14	2.48E-09	1.74E-09	2.76E-11	2.90E-13
ORDNUNG								
1.67E-01!		6.18	6.66	5.05	.87	1.20	6.08	6.17
8.33E-02!		6.05	6.06	16.89	4.65	.34	1.53	6.00
4.17E-02!		6.01	6.01	6.02	6.16	1.46	.14	2.04
2.08E-02!		6.00	6.00	6.00	18.00	4.95	.56	.06
1.04E-02!		6.00	6.00	6.00	18.00	4.95	.56	.06

Tabelle 29c

T R A P E Z R E G E L
 G L O B A L E VERBINDUNGSSTRATEGIE J E D E R PUNKT WIRD INTERPOLIERT M = 6
 FIXE PARAMETER: ALPHA: 1.00E+01
 T: 1.00E+00

O R I G I N A L P R O B L E M

F E H L E R

H\LAMBD!	-2.00E+00	-1.00E+01	-1.00E+02	-1.00E+03	-1.00E+04	-1.00E+05	-1.00E+06	-1.00E+07
!								
1.67E-01!	5.54E-02	6.33E-03	6.33E-03	6.33E-03	6.33E-03	6.33E-03	6.33E-03	6.33E-03
8.33E-02!	1.44E-02	1.58E-03	1.58E-03	1.58E-03	1.58E-03	1.58E-03	1.58E-03	1.58E-03
4.17E-02!	3.64E-03	3.93E-04	3.93E-04	3.93E-04	3.93E-04	3.93E-04	3.93E-04	3.93E-04
2.08E-02!	9.12E-04	9.83E-05	9.83E-05	9.83E-05	9.83E-05	9.83E-05	9.83E-05	9.83E-05
1.04E-02!	2.28E-04	2.46E-05	2.46E-05	2.46E-05	2.46E-05	2.46E-05	2.46E-05	2.46E-05

O R D N U N G E N

1.67E-01!								
8.33E-02!	1.94	2.01	2.01	2.01	2.01	2.01	2.01	2.01
4.17E-02!	1.99	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
2.08E-02!	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
1.04E-02!	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00

Tabelle 30a

1 . N A C H B A R P R O B L E M

F E H L E R

H\LAMBD!	-2.00E+00	-1.00E+01	-1.00E+02	-1.00E+03	-1.00E+04	-1.00E+05	-1.00E+06	-1.00E+07
!								
1.67E-01!	5.35E-03	5.05E-05	5.05E-05	5.05E-05	5.05E-05	5.05E-05	5.05E-05	5.05E-05
8.33E-02!	7.97E-06	3.18E-06	3.18E-06	3.18E-06	3.18E-06	3.18E-06	3.18E-06	3.18E-06
4.17E-02!	2.65E-05	1.99E-07	1.99E-07	1.99E-07	1.99E-07	1.99E-07	1.99E-07	1.99E-07
2.08E-02!	2.43E-06	1.24E-08	1.24E-08	1.24E-08	1.24E-08	1.24E-08	1.24E-08	1.24E-08
1.04E-02!	1.67E-07	7.78E-10	7.78E-10	7.78E-10	7.78E-10	7.78E-10	7.78E-10	7.78E-10

O R D N U N G E N

1.67E-01!								
8.33E-02!	9.39	3.99	3.99	3.99	3.99	3.99	3.99	3.99
4.17E-02!	-1.73	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00
2.08E-02!	3.44	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00
1.04E-02!	3.87	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00

Tabelle 30b

2 . N A C H B A R P R O B L E M

F E H L E R

H\LAMBD!	-2.00E+00	-1.00E+01	-1.00E+02	-1.00E+03	-1.00E+04	-1.00E+05	-1.00E+06	-1.00E+07
!								
1.67E-01!	7.62E-03	1.19E-06	1.17E-06	1.17E-06	1.17E-06	1.17E-06	1.17E-06	1.17E-06
8.33E-02!	3.86E-04	1.74E-08	2.11E-08	1.74E-08	1.74E-08	1.74E-08	1.74E-08	1.74E-08
4.17E-02!	9.95E-06	2.68E-10	2.68E-10	2.76E-10	2.68E-10	2.68E-10	2.68E-10	2.68E-10
2.08E-02!	1.82E-07	4.17E-12	4.17E-12	4.19E-12	4.18E-12	4.17E-12	4.17E-12	4.17E-12
1.04E-02!	2.97E-09	6.52E-14	6.52E-14	6.52E-14	7.04E-14	6.52E-14	6.52E-14	6.52E-14

O R D N U N G E N

1.67E-01!								
8.33E-02!	4.30	6.09	5.80	6.07	6.07	6.07	6.07	6.07
4.17E-02!	5.28	6.02	6.30	5.98	6.02	6.02	6.02	6.02
2.08E-02!	5.77	6.00	6.00	6.04	6.00	6.00	6.00	6.00
1.04E-02!	5.94	6.00	6.00	6.01	5.89	6.00	6.00	6.00

Tabelle 30c

MITTELPUNKTSREGEL
 GLOBALE VERBINDUNGSSTRATEGIE JEDER PUNKT WIRD INTERPOLIERT M = 6
 FIXE PARAMETER: ALPHA: 1.00E+01
 T: 1.00E+00

ORIGINALPROBLEM

FEHLER

H\LAMBDA!	-2.00E+00	-1.00E+01	-1.00E+02	-1.00E+03	-1.00E+04	-1.00E+05	-1.00E+06	-1.00E+07
!								
1.67E-01!	1.76E-02	6.33E-03	6.33E-03	6.33E-03	6.33E-03	6.33E-03	6.33E-03	6.33E-03
8.33E-02!	4.77E-03	1.58E-03	1.58E-03	1.58E-03	1.58E-03	1.58E-03	1.58E-03	1.58E-03
4.17E-02!	1.22E-03	3.94E-04	3.93E-04	3.93E-04	3.93E-04	3.93E-04	3.93E-04	3.93E-04
2.08E-02!	3.06E-04	9.84E-05	9.83E-05	9.83E-05	9.83E-05	9.83E-05	9.83E-05	9.83E-05
1.04E-02!	7.65E-05	2.46E-05	2.46E-05	2.46E-05	2.46E-05	2.46E-05	2.46E-05	2.46E-05
ORDNUNGEN								
1.57E-01!		1.89	2.01	2.01	2.01	2.01	2.01	2.01
8.33E-02!		1.97	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
4.17E-02!		1.99	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
2.08E-02!		2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
1.04E-02!		2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00

Tabelle 31a

1. NACHBARPROBLEM

FEHLER

H\LAMBDA!	-2.00E+00	-1.00E+01	-1.00E+02	-1.00E+03	-1.00E+04	-1.00E+05	-1.00E+06	-1.00E+07
!								
1.67E-01!	8.41E-03	3.08E-05	9.04E-05	3.01E-05	3.00E-05	3.00E-05	3.00E-05	3.00E-05
8.33E-02!	5.02E-04	1.83E-06	2.29E-06	2.59E-06	1.83E-06	1.83E-06	1.83E-06	1.83E-06
4.17E-02!	2.08E-05	1.14E-07	1.14E-07	3.49E-07	1.17E-07	1.14E-07	1.14E-07	1.14E-07
2.08E-02!	9.55E-07	7.12E-09	7.12E-09	7.12E-09	1.48E-08	7.12E-09	7.12E-09	7.12E-09
1.04E-02!	5.31E-08	4.45E-10	4.45E-10	4.45E-10	9.30E-10	4.98E-10	4.45E-10	4.45E-10
ORDNUNGEN								
1.67E-01!		4.07	4.07	5.30	3.54	4.03	4.03	4.03
8.33E-02!		4.60	4.01	4.33	2.90	3.97	4.01	4.01
4.17E-02!		4.44	4.00	4.00	5.61	2.98	4.00	4.00
2.08E-02!		4.17	4.00	4.00	4.00	3.99	3.84	4.00
1.04E-02!								

Tabelle 31b

2. NACHBARPROBLEM

FEHLER

H\LAMBDA!	-2.00E+00	-1.00E+01	-1.00E+02	-1.00E+03	-1.00E+04	-1.00E+05	-1.00E+06	-1.00E+07
!								
1.67E-01!	7.87E-03	8.55E-07	4.67E-04	2.39E-05	6.17E-07	5.48E-07	5.48E-07	5.48E-07
8.33E-02!	3.90E-04	7.65E-09	1.41E-05	1.31E-05	2.68E-07	8.12E-09	7.59E-09	7.59E-09
4.17E-02!	9.89E-06	1.15E-10	1.15E-10	5.21E-07	2.11E-07	2.82E-09	1.19E-10	1.15E-10
2.08E-02!	1.80E-07	1.79E-12	1.78E-12	7.30E-09	7.69E-08	2.56E-09	2.87E-11	1.80E-12
1.04E-02!	2.93E-09	2.79E-14	2.78E-14	2.78E-14	2.48E-09	1.74E-09	2.76E-11	2.90E-13
ORDNUNGEN								
1.67E-01!		4.34	6.80	5.05	.87	1.20	6.08	6.17
8.33E-02!		5.30	6.05	16.90	4.65	.34	1.53	6.00
4.17E-02!		5.78	6.01	6.01	6.16	1.46	.14	2.04
2.08E-02!		5.94	6.00	6.00	18.00	4.96	.56	.06
1.04E-02!								2.64

Tabelle 31c

4.4. Testproblem 4

4.4.1. Beschreibung von Testproblem 4 (Liniger)

Als letztes Testbeispiel wurde ein quadratisches System von zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung gewählt:

$$\begin{aligned}y_1' &= -\frac{1}{5}[(4b + g)y_1 + (2b - 2g)y_2] - \frac{2}{25}\mu e^{bt}(2y_1 + y_2)^2 \\y_2' &= -\frac{1}{5}[(2b - 2g)y_1 + (b + 4g)y_2] - \frac{1}{25}\mu e^{bt}(2y_1 + y_2)^2\end{aligned}\quad (4.10)$$

mit den Anfangswerten

$$\begin{aligned}y_1(0) &= 2 - a \\y_2(0) &= 1 + 2a.\end{aligned}$$

Als exakte Lösung von (4.10) ergibt sich somit

$$\begin{aligned}y_1(t) &= 2F(t) - ae^{-gt} \\y_2(t) &= F(t) + 2ae^{-gt}, \quad \text{wobei} \\F(t) &= \frac{e^{-bt}}{1 + \mu t} \quad \text{ist.}\end{aligned}\quad (4.11)$$

Berechnet man die Jacobi-Matrix J der rechten Seite von (4.10), so erhält man

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}(4b + g) - \frac{8}{25}\mu e^{bt}(2y_1 + y_2) & -\frac{1}{5}(2b - 2g) - \frac{4}{25}\mu e^{bt}(2y_1 + y_2) \\ -\frac{1}{5}(2b - 2g) - \frac{4}{25}\mu e^{bt}(2y_1 + y_2) & -\frac{1}{5}(b + 4g) - \frac{2}{25}\mu e^{bt}(2y_1 + y_2) \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Die Eigenwerte von (4.12) ergeben sich auf der exakten Lösung (4.11) zu

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -[b + 2\mu e^{bt}F(t)], \\ \lambda_2 &= -g.\end{aligned}\quad (4.13)$$

Für positive Werte von b , μ und g ist das Gleichungssystem (4.10) steif, falls $g \gg b$ und μ . μ ist ein Maß für die Nichtlinearität von (4.10). Mit wachsendem μ wächst auch der Betrag des Eigenwertes λ_1 , und für entsprechend große μ liegen daher zwei betragsgroße negative Eigenwerte vor. Bei Wahl von $\mu = 0$ entsteht ein lineares Gleichungssystem mit konstanten Koeffizienten (die quadratischen Terme verschwinden). Beispiel entnommen aus [3] und [4].

4.4.2. Experimente mit Testproblem 4

Beide Komponenten der exakten Lösung (4.11) bestehen aus zwei Summanden mit den exponentiell abklingenden Faktoren e^{-bt} bzw. e^{-gt} . Wählt man g sehr groß, so klingt der zweite Faktor sehr schnell ab („transientes Verhalten“), und dann ist man in der Nähe der Startstelle $t = 0$ zu einer sehr kleinen Schrittweite h gezwungen, um der Lösung mit vernünftiger Genauigkeit folgen zu können. Nur im Fall $a = 0$ tritt dieser Effekt nicht auf, d. h., der Startwert liegt in diesem Fall bereits auf einer durch e^{-bt} charakterisierten, für moderates b glatten Lösung. Es wurden sowohl für $a = 0$ als auch für $a \neq 0$ Experimente durchgeführt. Für den Fall $a \neq 0$ wurde sowohl ein Experiment mit einem Startwert $t_0 > 0$ durchgeführt (e^{-gt} dort bereits „weggedämpft“). Bei allen Experimenten wurde jeder Punkt interpoliert. Es wurde jeweils die globale Verbindungsstrategie verwendet. Es wurde immer ein Polynomgrad von 6 gewählt.

- Die Tabellen 32a – 33c zeigen die Ergebnisse der Experimente bei $t = \frac{1}{2}$, wobei für die Tabellen 32a – 32c die ITR und für 33a – 33c die IMR als Basisverfahren gewählt wurde. Die Gleichungen wurden im Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ gelöst. Es wurde $a = 0$ gewählt, daher treten die Probleme mit der Schrittweitenwahl hier nicht auf. b wurde auf 0.2 gesetzt, g auf 200 (mittelsteife Situation). μ wurde variiert. Bei beiden Problemen treten bei großem μ Probleme mit dem verwendeten Newton-Verfahren auf: Die nichtlinearen Gleichungen konnten nicht gelöst werden, wobei die IMR um eine Variation um μ mehr schaffte. Bei Vergleich der analogen Tabellen mit der ITR und der IMR als Basisverfahren sieht man, daß die IMR ein etwas besseres Fehlerniveau besitzt. Im Spezialfall $\mu = 0$ (linear mit konstanten Koeffizienten) liefern die ITR und die IMR natürlich identische Werte (1. Spalte in Tabelle 32a, 33a). Dies gilt jedoch nicht mehr für die entsprechenden IDeC-Schritte.
- Die Tabellen 34a – 35c zeigen analoge Experimente, wobei jedoch g variiert wurde. μ wurde dabei auf 1 gesetzt und $a = 0$, $b = 0.2$ wie zuvor. Die Tabellen 34a – 34c zeigen wiederum die Ergebnisse der Experimente mit der ITR als Basisverfahren bei $t = \frac{1}{2}$; die Tabellen 35a – 35c die analogen Ergebnisse mit der IMR als Basisverfahren. Bei Betrachten dieser Tabellen fällt sofort auf, daß für alle gewählten Werte von g identische Fehlernormen und Ordnungen vorherrschen. Offensichtlich ergeben hier also — analog zur g -Unabhängigkeit der exakten Lösung der Differentialgleichung — die ITR und die IMR von g unabhängige Näherungswerte (eine Besonderheit des vorliegenden Beispiels). Die Tabellen mit der IMR als Basisverfahren zeigen wiederum ein etwas besseres Fehlerniveau; die Ordnungen beim 1. IDeC-Schritt mit der IMR sind allerdings etwas unsystematisch.
- Die Tabellen 36a – 37c zeigen die Ergebnisse von Experimenten, bei denen $a \neq 0$ gesetzt wurde. g wurde dabei wiederum auf 200 gesetzt; b auf 0.2. μ wurde wie vorhin variiert. Um Probleme mit der Schrittweitenwahl zu vermeiden, wurde das Gleichungssystem im Intervall $[0.2, 0.7]$ gelöst (Start auf exakter Lösung). (Bei $t = 0.2$ sind die Faktoren e^{-gt} schon weggedämpft). Man erkennt wiederum da etwas bessere Fehlerniveau der IDeC-Variante basierend auf der IMR.
- Die Tabellen 38a – 39c zeigen die Experimente auf dem Intervall $[0.2, 0.7]$, wobei g variiert wurde. Die Ergebnisse wurden bei $t = 0.7$ ausgegeben, $b = 0.2$, $a = 1$,

$\mu = 1$. Bei Durchsicht der Tabellen erkennt man, daß für große g die Ergebnisse identisch sind. Dies kann man sich so erklären, daß die Summanden, die von g abhängig sind, stark gedämpft sind und nur mehr die von g unabhängigen Summanden für das Ergebnis relevant sind. Man erkennt wiederum bei der IMR (Tabellen 39a – 39c) ein besseres Fehlerniveau als bei der ITR (Tabellen 38a – 38c).

- Die Tabellen 40a und 40b zeigen ein Experiment, bei dem über einen Schrittweitenwechsel interpoliert wurde. Es wurde hier eine Tabelle ausgegeben, wo die einzelnen Stützstellen angegeben wurden und nicht nur ein Punkt (wie bei den vorherigen Tabellen). Als Basisverfahren wurde die ITR verwendet. Die Gleichungen wurden auf dem Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ gelöst. Analog zu den Tabellen 13a und 13b bis 18a und 18b wurde dieses Intervall wiederum entsprechend dem Verhältnis $\bar{h} : h$ in zwei Intervalle zerlegt (\bar{h} und h wurden in den Tabellen wiederum durch H1 und H2 ersetzt). Durch Teilen dieser beiden Intervalle in $\frac{m}{2}$ jeweils äquidistante Teilintervalle wurden die zu interpolierenden Stützpunkte ermittelt. Diese so ermittelten Stützpunkte wurden wiederum interpoliert. Da bei Verfeinern des Gitters die Interpolation über den Schrittweitenwechsel wieder wegfällt, hat man wieder einen Vergleich der beiden Verfahren. Die Parameter wurden auf folgende Werte gesetzt: $a = 0, b = 0.2, g = 2000$ und $\mu = 1$; $\bar{h} : h$ wurde auf 2 gesetzt, woraus ein Schrittweitenwechsel bei $t = \frac{1}{6}$ folgt. Während bei Tabelle 40a über einen Schrittweitenwechsel interpoliert wurde, wurde bei Tabelle 40b nur mehr auf den beiden Teilintervallen separat interpoliert. Anhand der Fehlernormen läßt sich nicht viel aussagen, bei Betrachten der hohen Ordnungen in Tabelle 40b bei den IDeC-Schritten läßt sich jedoch auch hier auf ein Versagen dieser IDeC-Variante schließen.

Es wurde auch versucht, ein analoges Experiment wie bei den Tabellen 40a und 40b durchzuführen, wobei die IMR als Basisverfahren verwendet wurde, jedoch versagte hier das Newton-Verfahren bei der Lösung der nichtlinearen Gleichungen. Dies funktionierte jedoch wieder, als nur jeder zweite Punkt interpoliert wurde (Tabellen hier nicht angegeben).

- Vergleich ITR — IMR

Beide Verfahren funktionieren etwa gleich zufriedenstellend. Bei ansteigendem μ (wachsender Einfluß der Nichtlinearität) ist ein teilweise unsystematisches Ordnungsverhalten zu erkennen.

T R A P E Z R E G E L
 G L O B A L E VERBINDUNGSSTRATEGIE J E D E R PUNKT WIRD INTERPOLIERT M = 6
 FIXE PARAMETER: A: .00E+00 B: 2.00E-01 G: 2.00E+02
 T: 5.00E-01

O R I G I N A L P R O B L E M
 F E H L E R
 H\MY ! .00E+00 1.00E-02 1.00E-01 1.00E+00
 !
 8.33E-02! 4.68E-06 5.42E-06 2.00E-05 1.33E-03
 4.17E-02! 1.17E-06 1.35E-06 4.99E-06 3.32E-04
 2.08E-02! 2.93E-07 3.39E-07 1.25E-06 8.30E-05
 1.04E-02! 7.32E-08 8.46E-08 3.12E-07 2.07E-05
 5.21E-03! 1.83E-08 2.12E-08 7.80E-08 5.19E-06
 O R D N U N G E N
 8.33E-02! 2.00 2.00 2.00 2.00
 4.17E-02! 2.00 2.00 2.00 2.00
 2.08E-02! 2.00 2.00 2.00 2.00
 1.04E-02! 2.00 2.00 2.00 2.00
 5.21E-03! 2.00 2.00 2.00 2.00

Tabelle 32a

1 . N A C H B A R P R O B L E M
 F E H L E R
 H\MY ! .00E+00 1.00E-02 1.00E-01 1.00E+00
 !
 8.33E-02! 3.20E-10 4.31E-10 6.52E-09 1.30E-05
 4.17E-02! 2.00E-11 2.69E-11 4.08E-10 1.40E-06
 2.08E-02! 1.25E-12 1.68E-12 2.55E-11 6.89E-08
 1.04E-02! 7.81E-14 1.05E-13 1.60E-12 4.37E-09
 5.21E-03! 4.88E-15 6.58E-15 9.97E-14 2.74E-10
 O R D N U N G E N
 8.33E-02! 4.00 4.00 4.00 3.65
 4.17E-02! 4.00 4.00 4.00 3.92
 2.08E-02! 4.00 4.00 4.00 3.98
 1.04E-02! 4.00 4.00 4.00 3.99
 5.21E-03! 4.00 4.00 4.00 3.99

Tabelle 32b

2 . N A C H B A R P R O B L E M
 F E H L E R
 H\MY ! .00E+00 1.00E-02 1.00E-01 1.00E+00
 !
 8.33E-02! 7.27E-14 1.12E-13 1.43E-11 3.31E-06
 4.17E-02! 1.14E-15 1.75E-15 2.23E-13 5.78E-08
 2.08E-02! 1.77E-17 2.73E-17 3.49E-15 9.34E-10
 1.04E-02! 2.77E-19 4.27E-19 5.45E-17 1.47E-11
 5.21E-03! 4.33E-21 6.66E-21 8.51E-19 2.30E-13
 O R D N U N G E N
 8.33E-02! 6.00 6.00 6.00 5.84
 4.17E-02! 6.00 6.00 6.00 5.95
 2.08E-02! 6.00 6.00 6.00 5.99
 1.04E-02! 6.00 6.00 6.00 6.00
 5.21E-03! 6.00 6.00 6.00 6.00

Tabelle 32c

MITTELPUNKTSREGEL
 GLOBALE VERBINDUNGSSTRATEGIE JEDER PUNKT WIRD INTERPOLIERT M = 6
 FIXE PARAMETER: A: .00E+00 B: 2.00E-01 G: 2.00E+02
 T: 5.00E-01

ORIGINALPROBLEM
 FEHLER
 H\MY ! .00E+00 1.00E-02 1.00E-01 1.00E+00 1.00E+01
 !
 8.33E-02! 4.68E-06 5.76E-06 2.17E-05 8.25E-04 9.32E-03
 4.17E-02! 1.17E-06 1.44E-06 5.41E-06 2.06E-04 2.24E-03
 2.08E-02! 2.93E-07 3.60E-07 1.35E-06 5.14E-05 5.55E-04
 1.04E-02! 7.32E-08 9.00E-08 3.38E-07 1.29E-05 1.39E-04
 5.21E-03! 1.83E-08 2.25E-08 8.46E-08 3.21E-06 3.45E-05
 ORDNUNGEN
 8.33E-02! 2.00 2.00 2.00 2.00 2.06
 4.17E-02! 2.00 2.00 2.00 2.00 2.01
 2.08E-02! 2.00 2.00 2.00 2.00 2.00
 1.04E-02! 2.00 2.00 2.00 2.00 2.00
 5.21E-03! 2.00 2.00 2.00 2.00 2.00

Tabelle 33a

1. NACHBARPROBLEM
 FEHLER
 H\MY ! .00E+00 1.00E-02 1.00E-01 1.00E+00 1.00E+01
 !
 8.33E-02! 1.57E-10 2.31E-10 2.26E-09 2.26E-06 1.05E-02
 4.17E-02! 9.83E-12 1.44E-11 1.41E-10 3.42E-08 5.53E-04
 2.08E-02! 6.14E-13 9.03E-13 8.79E-12 2.26E-10 1.86E-05
 1.04E-02! 3.84E-14 5.64E-14 5.50E-13 1.70E-11 3.89E-07
 5.21E-03! 2.40E-15 3.53E-15 3.43E-14 1.55E-12 3.16E-09
 ORDNUNGEN
 8.33E-02! 4.00 4.00 4.00 6.04 4.24
 4.17E-02! 4.00 4.00 4.00 7.24 4.89
 2.08E-02! 4.00 4.00 4.00 3.73 5.58
 1.04E-02! 4.00 4.00 4.00 3.45 6.95
 5.21E-03!

Tabelle 33b

2. NACHBARPROBLEM
 FEHLER
 H\MY ! .00E+00 1.00E-02 1.00E-01 1.00E+00 1.00E+01
 !
 8.33E-02! 3.93E-14 5.68E-14 1.06E-11 2.86E-06 8.26E-03
 4.17E-02! 6.13E-16 8.87E-16 1.66E-13 5.07E-08 5.49E-04
 2.08E-02! 9.58E-18 1.39E-17 2.59E-15 8.23E-10 2.23E-05
 1.04E-02! 1.50E-19 2.16E-19 4.04E-17 1.30E-11 5.75E-07
 5.21E-03! 2.34E-21 3.38E-21 6.31E-19 2.03E-13 1.09E-08
 ORDNUNGEN
 8.33E-02! 6.00 6.00 6.00 5.81 3.91
 4.17E-02! 6.00 6.00 6.00 5.95 4.62
 2.08E-02! 6.00 6.00 6.00 5.99 5.28
 1.04E-02! 6.00 6.00 6.00 6.00 5.71
 5.21E-02!

Tabelle 33c

T R A P E Z R E G E L
 G L O B A L E VERBINDUNGSSTRATEGIE J E D E R PUNKT WIRD INTERPOLIERT M = 6
 FIXE PARAMETER: A: .00E+00 B: 2.00E-01 MY: 1.00E+00
 T: 5.00E-01

O R I G I N A L P R O B L E M

F E H L E R

H\G	!	2.00E-02	2.00E-01	2.00E+00	2.00E+01	2.00E+02	2.00E+03
8.33E-02!	!	1.33E-03	1.33E-03	1.33E-03	1.33E-03	1.33E-03	1.33E-03
4.17E-02!	!	3.32E-04	3.32E-04	3.32E-04	3.32E-04	3.32E-04	3.32E-04
2.08E-02!	!	8.30E-05	8.30E-05	8.30E-05	8.30E-05	8.30E-05	8.30E-05
1.04E-02!	!	2.07E-05	2.07E-05	2.07E-05	2.07E-05	2.07E-05	2.07E-05
5.21E-03!	!	5.19E-06	5.19E-06	5.19E-06	5.19E-06	5.19E-06	5.19E-06

O R D N U N G E N

8.33E-02!		2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
4.17E-02!		2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
2.08E-02!		2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
1.04E-02!		2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
5.21E-03!		2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00

Tabelle 34a

1 . N A C H B A R P R O B L E M

F E H L E R

H\G	!	2.00E-02	2.00E-01	2.00E+00	2.00E+01	2.00E+02	2.00E+03
8.33E-02!	!	1.30E-05	1.30E-05	1.30E-05	1.30E-05	1.30E-05	1.30E-05
4.17E-02!	!	1.04E-06	1.04E-06	1.04E-06	1.04E-06	1.04E-06	1.04E-06
2.08E-02!	!	6.89E-08	6.89E-08	6.89E-08	6.89E-08	6.89E-08	6.89E-08
1.04E-02!	!	4.37E-09	4.37E-09	4.37E-09	4.37E-09	4.37E-09	4.37E-09
5.21E-02!	!	2.74E-10	2.74E-10	2.74E-10	2.74E-10	2.74E-10	2.74E-10

O R D N U N G E N

8.33E-02!		3.65	3.65	3.65	3.65	3.65	3.65
4.17E-02!		3.92	3.92	3.92	3.92	3.92	3.92
2.08E-02!		3.98	3.98	3.98	3.98	3.98	3.98
1.04E-02!		3.99	3.99	3.99	3.99	3.99	3.99
5.21E-02!		3.99	3.99	3.99	3.99	3.99	3.99

Tabelle 34b

2 . N A C H B A R P R O B L E M

F E H L E R

H\G	!	2.00E-02	2.00E-01	2.00E+00	2.00E+01	2.00E+02	2.00E+03
8.33E-02!	!	3.31E-06	3.31E-06	3.31E-06	3.31E-06	3.31E-06	3.31E-06
4.17E-02!	!	5.78E-08	5.78E-08	5.78E-08	5.78E-08	5.78E-08	5.78E-08
2.08E-02!	!	9.34E-10	9.34E-10	9.34E-10	9.34E-10	9.34E-10	9.34E-10
1.04E-02!	!	1.47E-11	1.47E-11	1.47E-11	1.47E-11	1.47E-11	1.47E-11
5.21E-03!	!	2.30E-13	2.30E-13	2.30E-13	2.30E-13	2.30E-13	2.30E-13

O R D N U N G E N

8.33E-02!		5.84	5.84	5.84	5.84	5.84	5.84
4.17E-02!		5.95	5.95	5.95	5.95	5.95	5.95
2.08E-02!		5.99	5.99	5.99	5.99	5.99	5.99
1.04E-02!		6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00
5.21E-03!		6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00

Tabelle 34C

MITTELPUNKTSREGEL
 GLOBALE VERBINDUNGSSTRATEGIE JEDER PUNKT WIRD INTERPOLIERT M = 6
 FIXE PARAMETER: A: .00E+00 B: 2.00E-01 MY: 1.00E+00
 T: 5.00E-01

ORIGINALPROBLEM
 FEHLER
 H\G ! 2.00E-02 2.00E-01 2.00E+00 2.00E+01 2.00E+02 2.00E+03
 !
 8.33E-02! 8.25E-04 8.25E-04 8.25E-04 8.25E-04 8.25E-04 8.25E-04
 4.17E-02! 2.06E-04 2.06E-04 2.06E-04 2.06E-04 2.06E-04 2.06E-04
 2.08E-02! 5.14E-05 5.14E-05 5.14E-05 5.14E-05 5.14E-05 5.14E-05
 1.04E-02! 1.29E-05 1.29E-05 1.29E-05 1.29E-05 1.29E-05 1.29E-05
 5.21E-03! 3.21E-06 3.21E-06 3.21E-06 3.21E-06 3.21E-06 3.21E-06
 ORDNUNGEN
 8.33E-02! 2.00 2.00 2.00 2.00 2.00 2.00
 4.17E-02! 2.00 2.00 2.00 2.00 2.00 2.00
 2.08E-02! 2.00 2.00 2.00 2.00 2.00 2.00
 1.04E-02! 2.00 2.00 2.00 2.00 2.00 2.00
 5.21E-03! 2.00 2.00 2.00 2.00 2.00 2.00

Tabelle 35a

1. NACHBARPROBLEM
 FEHLER
 H\G ! 2.00E-02 2.00E-01 2.00E+00 2.00E+01 2.00E+02 2.00E+03
 !
 8.33E-02! 2.26E-06 2.26E-06 2.26E-06 2.26E-06 2.26E-06 2.26E-06
 4.17E-02! 3.42E-08 3.42E-08 3.42E-08 3.42E-08 3.42E-08 3.42E-08
 2.08E-02! 2.26E-10 2.26E-10 2.26E-10 2.26E-10 2.26E-10 2.26E-10
 1.04E-02! 1.70E-11 1.70E-11 1.70E-11 1.70E-11 1.70E-11 1.70E-11
 5.21E-03! 1.55E-12 1.55E-12 1.55E-12 1.55E-12 1.55E-12 1.55E-12
 ORDNUNGEN
 8.33E-02! 6.04 6.04 6.04 6.04 6.04 6.04
 4.17E-02! 7.24 7.24 7.24 7.24 7.24 7.24
 2.08E-02! 3.73 3.73 3.73 3.73 3.73 3.73
 1.04E-02! 3.45 3.45 3.45 3.45 3.45 3.45
 5.21E-03! 3.45 3.45 3.45 3.45 3.45 3.45

Tabelle 35b

2. NACHBARPROBLEM
 FEHLER
 H\G ! 2.00E-02 2.00E-01 2.00E+00 2.00E+01 2.00E+02 2.00E+03
 !
 8.33E-02! 2.86E-06 2.86E-06 2.86E-06 2.86E-06 2.86E-06 2.86E-06
 4.17E-02! 5.07E-08 5.07E-08 5.07E-08 5.07E-08 5.07E-08 5.07E-08
 2.08E-02! 8.23E-10 8.23E-10 8.23E-10 8.23E-10 8.23E-10 8.23E-10
 1.04E-02! 1.30E-11 1.30E-11 1.30E-11 1.30E-11 1.30E-11 1.30E-11
 5.21E-03! 2.03E-13 2.03E-13 2.03E-13 2.03E-13 2.03E-13 2.03E-13
 ORDNUNGEN
 8.33E-02! 5.81 5.81 5.81 5.81 5.81 5.81
 4.17E-02! 5.95 5.95 5.95 5.95 5.95 5.95
 2.08E-02! 5.99 5.99 5.99 5.99 5.99 5.99
 1.04E-02! 6.00 6.00 6.00 6.00 6.00 6.00
 5.21E-03! 6.00 6.00 6.00 6.00 6.00 6.00

Tabelle 35c

T R A P E Z R E G E L
 G L O B A L E VERBINDUNGSSTRATEGIE J E D E R PUNKT WIRD INTERPOLIERT M = 6
 FIXE PARAMETER: A: 1.00E+00 B: 2.00E-01 G: 2.00E+02
 T: 7.00E-01 (T0: 2.00E-01)

O R I G I N A L P R O B L E M

F E H L E R

H\MY	!	.00E+00	1.00E-02	1.00E-01	1.00E+00	1.00E+01	1.00E+02	1.00E+03	1.00E+04
8.33E-02!	!								
8.33E-02!		4.50E-06	5.19E-06	1.83E-05	7.63E-04	2.46E-03	4.97E-04	5.39E-05	5.44E-06
4.17E-02!		1.12E-06	1.30E-06	4.59E-06	1.90E-04	6.06E-04	1.22E-04	1.32E-05	1.33E-06
2.08E-02!		2.81E-07	3.25E-07	1.15E-06	4.76E-05	1.51E-04	3.02E-05	3.28E-06	3.30E-07
1.04E-02!		7.03E-08	8.11E-08	2.87E-07	1.19E-05	3.77E-05	7.55E-06	8.18E-07	8.24E-08
5.21E-03!		1.76E-08	2.03E-08	7.17E-08	2.97E-06	9.43E-06	1.89E-06	2.04E-07	2.06E-08
O R D N U N G E N									
8.33E-02!									
4.17E-02!		2.00	2.00	2.00	2.00	2.02	2.03	2.03	2.03
2.08E-02!		2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.01	2.01	2.01
1.04E-02!		2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
5.21E-03!		2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00

Tabelle 36a

1 . N A C H B A R P R O B L E M

F E H L E R

H\MY	!	.00E+00	1.00E-02	1.00E-01	1.00E+00	1.00E+01	1.00E+02	1.00E+03	1.00E+04
8.33E-02!	!								
8.33E-02!		3.07E-10	4.13E-10	5.83E-09	6.11E-06	1.09E-04	8.53E-05	1.06E-05	1.08E-06
4.17E-02!		1.92E-11	2.58E-11	3.65E-10	4.52E-07	6.13E-06	3.01E-07	2.25E-09	1.20E-10
2.08E-02!		1.20E-12	1.61E-12	2.28E-11	2.94E-08	7.60E-07	2.31E-07	2.61E-08	2.64E-09
1.04E-02!		7.50E-14	1.01E-13	1.43E-12	1.86E-09	5.52E-08	1.96E-08	2.27E-09	2.31E-10
5.21E-03!		4.69E-15	6.30E-15	8.92E-14	1.16E-10	3.58E-09	1.32E-09	1.54E-10	1.57E-11
O R D N U N G E N									
8.33E-02!									
4.17E-02!		4.00	4.00	4.00	3.76	4.15	8.15	12.20	13.14
2.08E-02!		4.00	4.00	4.00	3.94	3.01	.38	-3.53	-4.47
1.04E-02!		4.00	4.00	4.00	3.99	3.78	3.56	3.52	3.52
5.21E-03!		4.00	4.00	4.00	4.00	3.95	3.89	3.88	3.88

Tabelle 36b

2 . N A C H B A R P R O B L E M

F E H L E R

H\MY	!	.00E+00	1.00E-02	1.00E-01	1.00E+00	1.00E+01	1.00E+02	1.00E+03	1.00E+04
8.33E-02!	!								
8.33E-02!		6.99E-14	1.07E-13	1.23E-11	1.03E-06	2.04E-04	9.74E-05	1.17E-05	1.19E-06
4.17E-02!		1.09E-15	1.67E-15	1.92E-13	1.75E-08	5.55E-06	3.21E-06	3.95E-07	4.03E-08
2.08E-02!		1.70E-17	2.62E-17	3.00E-15	2.80E-10	1.12E-07	7.48E-08	9.38E-09	9.60E-10
1.04E-02!		2.66E-19	4.09E-19	4.69E-17	4.41E-12	1.91E-09	1.37E-09	1.74E-10	1.78E-11
5.21E-03!		4.16E-21	6.38E-21	7.32E-19	6.90E-14	3.05E-11	2.25E-11	2.86E-12	2.93E-13
O R D N U N G E N									
8.33E-02!									
4.17E-02!		6.00	6.00	6.00	5.88	5.20	4.92	4.89	4.88
2.08E-02!		6.00	6.00	6.00	5.97	5.63	5.42	5.40	5.39
1.04E-02!		6.00	6.00	6.00	5.99	5.87	5.77	5.76	5.75
5.21E-03!		6.00	6.00	6.00	6.00	5.96	5.93	5.92	5.92

Tabelle 36c

MITTELPUNKTSREGEL
 GLOBALE VERBINDUNGSSTRATEGIE JEDER PUNKT WIRD INTERPOLIERT M = 6
 FIXE PARAMETER: A: 1.00E+00 B: 2.00E-01 G: 2.00E+02
 T: 7.00E-01 (T0: 2.00E-01)

ORIGINALPROBLEM

FEHLER

H\MY	!	.00E+00	1.00E-02	1.00E-01	1.00E+00	1.00E+01	1.00E+02	1.00E+03	1.00E+04
8.33E-02!	!								
8.33E-02!		4.50E-06	5.52E-06	1.99E-05	4.87E-04	1.33E-03	2.63E-04	2.84E-05	2.87E-06
4.17E-02!		1.12E-06	1.38E-06	4.99E-06	1.22E-04	3.31E-04	6.50E-05	7.03E-06	7.09E-07
2.08E-02!		2.81E-07	3.45E-07	1.25E-06	3.04E-05	8.27E-05	1.62E-05	1.75E-06	1.77E-07
1.04E-02!		7.03E-08	8.63E-08	3.12E-07	7.60E-06	2.07E-05	4.05E-06	4.38E-07	4.41E-08
5.21E-03!		1.76E-08	2.16E-08	7.79E-08	1.90E-06	5.16E-06	1.01E-06	1.09E-07	1.10E-08
ORDNUNG									
8.33E-02!		2.00	2.00	2.00	2.00	2.01	2.02	2.02	2.02
4.17E-02!		2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
2.08E-02!		2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
1.04E-02!		2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
5.21E-03!		2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00

Tabelle 37a

1. NACHBARPROBLEM

FEHLER

H\MY	!	.00E+00	1.00E-02	1.00E-01	1.00E+00	1.00E+01	1.00E+02	1.00E+03	1.00E+04
8.33E-02!	!								
8.33E-02!		1.51E-10	2.22E-10	2.05E-09	7.66E-07	1.38E-04	6.62E-05	7.92E-06	8.07E-07
4.17E-02!		9.44E-12	1.38E-11	1.28E-10	1.42E-08	3.42E-06	2.11E-06	2.60E-07	2.66E-08
2.08E-02!		5.90E-13	8.65E-13	7.99E-12	3.10E-10	4.25E-08	4.00E-08	5.15E-09	5.28E-10
1.04E-02!		3.69E-14	5.41E-14	4.99E-13	1.00E-11	1.03E-09	9.76E-11	2.18E-11	2.33E-12
5.21E-03!		2.30E-15	3.38E-15	3.12E-14	4.81E-13	1.29E-10	3.97E-11	4.44E-12	4.49E-13
ORDNUNG									
8.33E-02!		4.00	4.00	4.00	5.75	5.34	4.97	4.93	4.92
4.17E-02!		4.00	4.00	4.00	5.52	6.33	5.72	5.66	5.65
2.08E-02!		4.00	4.00	4.00	4.95	5.37	8.68	7.88	7.83
1.04E-02!		4.00	4.00	4.00	4.38	3.00	1.30	2.30	2.37

Tabelle 37b

2. NACHBARPROBLEM

FEHLER

H\MY	!	.00E+00	1.00E-02	1.00E-01	1.00E+00	1.00E+01	1.00E+02	1.00E+03	1.00E+04
8.33E-02!	!								
8.33E-02!		3.77E-14	5.44E-14	9.09E-12	8.95E-07	1.57E-04	6.83E-05	8.07E-06	8.21E-07
4.17E-02!		5.89E-16	8.50E-16	1.42E-13	1.54E-08	4.71E-06	2.62E-06	3.20E-07	3.26E-08
2.08E-02!		9.20E-18	1.33E-17	2.21E-15	2.46E-10	9.86E-08	6.50E-08	8.13E-09	8.32E-10
1.04E-02!		1.44E-19	2.07E-19	3.46E-17	3.88E-12	1.70E-09	1.22E-09	1.54E-10	1.58E-11
5.21E-03!		2.25E-21	3.24E-21	5.41E-19	6.07E-14	2.74E-11	2.01E-11	2.56E-12	2.62E-13
ORDNUNG									
8.33E-02!		6.00	6.00	6.00	5.87	5.06	4.70	4.66	4.65
4.17E-02!		6.00	6.00	6.00	5.96	5.58	5.33	5.30	5.29
2.08E-02!		6.00	6.00	6.00	5.99	5.86	5.74	5.72	5.72
1.04E-02!		6.00	6.00	6.00	6.00	5.96	5.92	5.91	5.91

Tabelle 37c

T R A P E Z R E G E L
 G L O B A L E VERBINDUNGSSTRATEGIE J E D E R PUNKT WIRD INTERPOLIERT M = 6
 FIXE PARAMETER: A: 1.00E+00 B: 2.00E-01 MY: 1.00E+00
 T: 7.00E-01 (T0: 2.00E-01)

O R I G I N A L P R O B L E M

F E H L E R

H\G	!	2.00E-02	2.00E-01	2.00E+00	2.00E+01	2.00E+02	2.00E+03
8.33E-02!	!	7.63E-04	7.63E-04	1.49E-03	7.63E-04	7.63E-04	7.63E-04
4.17E-02!	!	1.90E-04	1.90E-04	3.72E-04	1.90E-04	1.90E-04	1.90E-04
2.08E-02!	!	4.76E-05	4.76E-05	9.29E-05	4.76E-05	4.76E-05	4.76E-05
1.04E-02!	!	1.19E-05	1.19E-05	2.32E-05	1.19E-05	1.19E-05	1.19E-05
5.21E-03!	!	2.97E-06	2.97E-06	5.80E-06	2.97E-06	2.97E-06	2.97E-06

O R D N U N G E N

8.33E-02!		2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
4.17E-02!		2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
2.08E-02!		2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
1.04E-02!		2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
5.21E-03!		2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00

Tabelle 38a

1 . N A C H B A R P R O B L E M

F E H L E R

H\G	!	2.00E-02	2.00E-01	2.00E+00	2.00E+01	2.00E+02	2.00E+03
8.33E-02!	!	6.11E-06	6.11E-06	9.46E-06	7.49E-06	6.11E-06	6.11E-06
4.17E-02!	!	4.52E-07	4.52E-07	6.44E-07	7.09E-07	4.52E-07	4.52E-07
2.08E-02!	!	2.94E-08	2.94E-08	4.12E-08	3.12E-08	2.94E-08	2.94E-08
1.04E-02!	!	1.86E-09	1.86E-09	2.59E-09	1.93E-09	1.86E-09	1.86E-09
5.21E-03!	!	1.16E-10	1.16E-10	1.62E-10	1.20E-10	1.16E-10	1.16E-10

O R D N U N G E N

8.33E-02!		3.76	3.76	3.88	10.04	3.76	3.76
4.17E-02!		3.94	3.94	3.97	4.51	3.94	3.94
2.08E-02!		3.99	3.99	3.99	4.02	3.99	3.99
1.04E-02!		4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00
5.21E-03!		4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00

Tabelle 38b

2 . N A C H B A R P R O B L E M

F E H L E R

H\G	!	2.00E-02	2.00E-01	2.00E+00	2.00E+01	2.00E+02	2.00E+03
8.33E-02!	!	1.03E-02	1.03E-02	1.05E-02	4.43E-04	1.03E-02	1.03E-02
4.17E-02!	!	1.75E-08	1.75E-08	1.78E-08	3.99E-07	1.75E-08	1.75E-08
2.08E-02!	!	2.80E-10	2.80E-10	2.84E-10	1.84E-09	2.80E-10	2.80E-10
1.04E-02!	!	4.41E-12	4.41E-12	4.46E-12	1.78E-11	4.41E-12	4.41E-12
5.21E-02!	!	6.90E-14	6.90E-14	6.98E-14	2.41E-13	6.90E-14	6.90E-14

O R D N U N G E N

8.33E-02!		5.88	5.88	5.89	10.12	5.88	5.88
4.17E-02!		5.97	5.97	5.97	7.76	5.97	5.97
2.08E-02!		5.99	5.99	5.99	6.70	5.99	5.99
1.04E-02!		6.00	6.00	6.00	6.20	6.00	6.00
5.21E-02!		6.00	6.00	6.00	6.20	6.00	6.00

Tabelle 38c

MITTELPUNKTSREGEL
 GLOBALE VERBINDUNGSSTRATEGIE JEDER PUNKT WIRD INTERPOLIERT M = 6
 FIXE PARAMETER: A: 1.00E+00 B: 2.00E-01 MY: 1.00E+00
 T: 7.00E-01 (T0: 2.00E-01)

ORIGINALPROBLEM

FEHLER

H\G	!	2.00E-02	2.00E-01	2.00E+00	2.00E+01	2.00E+02	2.00E+03
8.33E-02!	!	4.87E-04	4.87E-04	1.37E-03	4.87E-04	4.87E-04	4.87E-04
4.17E-02!	!	1.22E-04	1.22E-04	3.42E-04	1.22E-04	1.22E-04	1.22E-04
2.08E-02!	!	3.04E-05	3.04E-05	8.54E-05	3.04E-05	3.04E-05	3.04E-05
1.04E-02!	!	7.60E-06	7.60E-06	2.13E-05	7.60E-06	7.60E-06	7.60E-06
5.21E-03!	!	1.90E-06	1.90E-06	5.34E-06	1.90E-06	1.90E-06	1.90E-06

ORDNUNGEN

8.33E-02!		2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
4.17E-02!		2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
2.08E-02!		2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
1.04E-02!		2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
5.21E-03!		2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00

Tabelle 39a

1. NACHBARPROBLEM

FEHLER

H\G	!	2.00E-02	2.00E-01	2.00E+00	2.00E+01	2.00E+02	2.00E+03
8.33E-02!	!	7.66E-07	7.66E-07	3.18E-06	7.29E-04	7.66E-07	7.66E-07
4.17E-02!	!	1.42E-08	1.42E-08	1.87E-07	1.02E-07	1.42E-08	1.42E-08
2.08E-02!	!	3.10E-10	3.10E-10	1.16E-08	1.18E-08	3.10E-10	3.10E-10
1.04E-02!	!	1.00E-11	1.00E-11	7.22E-10	8.31E-10	1.00E-11	1.00E-11
5.21E-03!	!	4.81E-13	4.81E-13	4.51E-11	5.29E-11	4.81E-13	4.81E-13

ORDNUNGEN

8.33E-02!		5.75	5.75	4.09	12.81	5.75	5.75
4.17E-02!		5.52	5.52	4.01	3.10	5.52	5.52
2.08E-02!		4.95	4.95	4.00	3.83	4.95	4.95
1.04E-02!		4.38	4.38	4.00	3.97	4.38	4.38

Tabelle 39b

2. NACHBARPROBLEM

FEHLER

H\G	!	2.00E-02	2.00E-01	2.00E+00	2.00E+01	2.00E+02	2.00E+03
8.33E-02!	!	8.95E-07	8.95E-07	9.05E-07	6.60E-04	8.95E-07	8.95E-07
4.17E-02!	!	1.54E-08	1.54E-08	1.55E-08	4.72E-07	1.54E-08	1.54E-08
2.08E-02!	!	2.46E-10	2.46E-10	2.48E-10	1.75E-09	2.46E-10	2.46E-10
1.04E-02!	!	3.88E-12	3.88E-12	3.90E-12	1.59E-11	3.88E-12	3.88E-12
5.21E-03!	!	6.07E-14	6.07E-14	6.10E-14	2.11E-13	6.07E-14	6.07E-14

ORDNUNGEN

8.33E-02!		5.87	5.87	5.87	10.45	5.87	5.87
4.17E-02!		5.96	5.96	5.96	8.07	5.96	5.96
2.08E-02!		5.99	5.99	5.99	6.78	5.99	5.99
1.04E-02!		6.00	6.00	6.00	6.24	6.00	6.00

Tabelle 39c

T R A P E Z R E G E L
 G L O B A L E VERBINDUNGSSTRATEGIE J E D E R PUNKT WIRD INTERPOLIERT M = 6
 A: .00E+00 B: 2.00E-01 G: 2.00E+03 MY: 1.00E+00
 T-WERTE: 5.56E-02 1.11E-01 1.67E-01 2.78E-01 3.89E-01 5.00E-01

OHNE VERFEINERUNG (H1 = 5.56E-02 - H2 = 1.11E-01)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: 1.99E-04 3.38E-04 4.36E-04 1.12E-03 1.47E-03 1.63E-03
 1. DC-SCHRITT: 5.68E-05 4.43E-05 2.10E-05 8.92E-05 2.06E-04 1.08E-03
 2. DC-SCHRITT: 5.80E-06 9.80E-06 1.22E-05 1.22E-05 8.35E-05 4.34E-04

Tabelle 40a

1. VERFEINERUNG (H1 = 2.78E-02 - H2 = 5.56E-02)

F E H L E R :
 BASISVERFAHREN: 4.95E-05 8.44E-05 1.09E-04! 2.79E-04 3.67E-04 4.06E-04
 1. DC-SCHRITT: 1.07E-07 1.74E-07 2.08E-07! 1.23E-06 1.67E-06 1.68E-06
 2. DC-SCHRITT: 2.80E-09 3.27E-09 5.64E-09! 7.13E-08 7.70E-08 1.29E-07
 O R D N U N G E N
 BASISVERFAHREN: 2.00 2.00 2.00! 2.01 2.01 2.01
 1. DC-SCHRITT: 9.05 7.99 6.66! 6.18 6.95 9.32
 2. DC-SCHRITT: 11.02 11.55 11.07! 7.42 10.08 11.72

Tabelle 40b

5. Zusammenfassung

5.1. Vergleich ITR — IMR

Die Aufgabe, die der Diplomarbeit zugrunde lag, war die experimentelle Erprobung und der Vergleich zwischen IDeC-Algorithmen mit der ITR als Basisverfahren und solchen mit der IMR als Basisverfahren. Bezüglich des Rechenaufwandes ist folgendes festzustellen:

Zur effizienteren Defektaufwertung werden geeignete Gewichtsmatrizen verwendet. Diese Gewichtsmatrizen hängen (bei äquidistantem Gitter) nur vom Grad der verwendeten Interpolationspolynome ab, aber nicht von der Schrittweite h . Da bei den IDeC-Verfahren nur ein fixer Polynomgrad verwendet wurde, können diese Gewichtsmatrizen schon vorher dem IDeC-Code zur Verfügung gestellt werden. Ein wesentlicher Unterschied bezüglich des Aufwandes zwischen beiden IDeC-Varianten besteht darin, daß man bei den Verfahren mit der ITR nur die Ableitungen — bei den Verfahren mit der IMR als Basisverfahren jedoch Werte und Ableitungen — der Interpolationspolynome durch Multiplikation mit den entsprechenden Gewichtsmatrizen berechnen muß.

Der weitaus größte Anteil des Aufwandes besteht jedoch bei der Lösung der auftretenden nichtlinearen Gleichungen mit dem Newton-Verfahren. Der Aufwand bei der Lösung von solchen Gleichungen hängt großteils von der Qualität der Konvergenz des Newton-Verfahrens ab. Da der Großteil der Rechenarbeit nur in der Lösung von solchen Gleichungen besteht, können sich hier Unterschiede im Aufwand ergeben, die weit über das vorher angegebene hinausgehen, die Anzahl der Newtonschritte bei den einzelnen Gleichungen wurde jedoch nicht erfaßt. Falls das Newton-Verfahren so schlecht konvergiert, daß man dazu eine zu große Anzahl von Newton-Schritten benötigen würde, wird das Verfahren abgebrochen (vgl. 3.3). Falls daher eine Gleichung nicht gelöst werden konnte, ist das möglicherweise ein Zeichen, daß das Newtonverfahren einen zu großen Rechenaufwand benötigen würde. Anhand der Tabellen 25a – 26c ist erkennbar, daß hier das IDeC-Verfahren bei hohem ω abgebrochen wurde. Falls man diese Tabellen mit den Tabellen 23a – 24c, wo dasselbe Experiment mit der ITR durchgeführt wurde, vergleicht, erkennt man, daß dort das Newton-Verfahren ein besseres Konvergenzverhalten zeigt wie bei der IMR.

Das wichtigste Kriterium beim Vergleich beider Verfahren ist natürlich die Güte der Ergebnisse. Bei Durchsicht der Tabellen erkennt man, daß die ITR meistens das bessere Fehlerniveau hat (außer bei Testproblem 4, wie die IMR das etwas bessere Fehlerniveau hat). Besonders markant ist dies bei den Prothero-Robinson-Testmodellen. Hier zeigen die IDeC-Schritte bei der ITR als Basisverfahren einen „ ε -Faktor“ gegenüber den Verfahren mit der IMR. Falls jeder Punkt interpoliert wird, versagte die Defektkorrektur mit der IMR als Basisverfahren bei steifen Problemen völlig, während die analoge Variante für die ITR oft zufriedenstellend funktionierte. Ein besseres Verhalten zeigt sich erst, als nur jeder zweite Punkt interpoliert wurde; das Fehlerniveau der ITR wurde dabei allerdings nicht erreicht.

Allgemein kann man daher sagen, daß bei Lösen von steifen Differentialgleichungen zuerst IDeC-Algorithmen mit der ITR als Basisverfahren gewählt werden sollten; falls

dies kein zufriedenstellendes Ergebnis zeigt, sollte man IDeC-Verfahren mit der IMR als Basisverfahren wählen.

5.2. Vergleich der Interpolationsvarianten: Jeder Punkt — Jeder zweite Punkt

Der Vergleich dieser beiden IDeC-Varianten wieder anhand des Rechenaufwandes spricht eindeutig für die Interpolation an jedem Punkt:

- 1) Man muß für die Interpolation an jedem zweiten Punkt doppelt so viele nichtlineare Gleichungen lösen wie bei Interpolation an jedem Punkt.
- 2) Die Berechnung der benötigten Werte und Ableitungen mit Hilfe von Gewichtsmatrizen ist bei Interpolation an jedem zweiten Punkt ungefähr doppelt so aufwendig wie bei Interpolation an jedem Punkt. Bei Interpolation an jedem zweiten Punkt müssen für die IDeC-Verfahren mit der ITR als Basisverfahren auch Werte der Interpolationspolynome an gewissen (den ungeraden) Stützstellen berechnet werden.
- 3) Die Interpolation an nur jedem zweiten Punkt führt zu einer gewissen Inflexibilität bei der Schrittweitenwahl.

Diese Nachteile bei Interpolation an jedem zweiten Punkt könnte man jedoch in Kauf nehmen, falls dadurch eine wesentliche Verbesserung der Ergebnisse gegenüber der Interpolation an jedem Punkt erzielt würde. Eine wesentliche Verbesserung wurde jedoch nur bei Prothero-Robinson-ähnlichen Modellen erzielt, bei denen die IMR als Basisverfahren gewählt wurde. Da die Ergebnisse der Basisverfahren bei diesen Modellen einen oszillierenden Verlauf um die Lösung nehmen, versagte dies bei IDeC-Verfahren, bei denen die IMR als Basisverfahren gewählt und jeder Punkt interpoliert wurde. Dies läßt sich so erklären, daß die Güte der IDeC von der Glattheit der zu interpolierenden Daten wesentlich abhängt. Daß bei Interpolation an jedem zweiten Punkt das IDeC-Verfahren wieder wirkt, ist dadurch bedingt, daß die Oszillation der Daten dadurch wieder ausgeschaltet wird. Obwohl die ITR ebenfalls oszillierende Daten produziert, ist bei den dementsprechenden IDeC-Verfahren meist keine wesentliche Verbesserung bei Interpolation an nur jedem zweiten Punkt gegenüber der Interpolation an jedem Punkt feststellbar. Dies ist wahrscheinlich dadurch bedingt, daß durch den „ ε -Faktor“ ihr Einfluß schon stark gedämpft ist. Bei den Modellen, bei denen ein glatter Fehlerverlauf vorherrscht, liefert die Interpolation an jedem zweiten Punkt sogar ein schlechteres Feherniveau als die Interpolation an jedem Punkt.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß die IDeC-Variante basierend auf der ITR in vielen — aber nicht allen — Situationen auch bei Interpolation an jedem Punkt funktioniert. Ein effizienter Code sollte diese Eigenschaft ausnützen, aber im Bedarfsfall auf die robustere Variante mit Interpolation an jedem zweiten Punkt „umschalten“. Die Implementierung einer solchen Strategie ist jedoch sicherlich nicht einfach.

5.3. Interpolation über einen Schrittweitenwechsel

Wie schon in den vorigen Kapiteln gesagt wurde, ist die Interpolation über einen Schrittweitenwechsel hinweg schon aus theoretischen Gründen nicht sinnvoll. Schon

bei der Berechnung der Gewichtsmatrizen ergibt sich hier ein wesentlicher Zusatzaufwand. Die Gewichtsmatrizen können nur für ein festes Verhältnis der Schrittweiten von vornherein bestimmt werden. Bei variierendem Verhältnis der Schrittweiten müssen sie immer wieder neu berechnet werden. Die Gewichtsmatrizen sind auch wesentlich komplizierter zu berechnen als die im äquidistanten Fall. Auch bei den Ergebnissen läßt sich keine wesentliche Verbesserung gegenüber dem äquidistanten Fall erzielen — im Gegenteil — die Ergebnisse werden in vielen Fällen sogar noch schlechter (auch im nichtsteifen Fall).

5.4. Vergleich der Verbindungsstrategien

In Kapitel 2.3. wurden die zwei verschiedenen Varianten der Verbindung zweier Interpolationsintervalle angeführt. Bei erster Betrachtung der beiden Verbindungsstrategien scheint die lokale Verbindungsstrategie sinnvoller, da hier beim nächsten Interpolationsintervall allgemein bei der genauesten Näherung der exakten Lösung gestartet wird. Durch diese Vorgangsweise handelt man sich jedoch bei jedem Intervall eine „Transientenphase“ ein. Das Fehlerniveau wird dadurch gegenüber der globalen Verbindungsstrategie nicht besser (falls die Defektkorrektur funktioniert, bleibt es in etwa gleich). Falls man das Ordnungsverhalten bei beiden Verbindungsstrategien betrachtet, fällt auf, daß sich die Ordnungen der lokalen Verbindungsstrategie schon bei nichtsteifen Differentialgleichungssystemen sehr unregelmäßig verhalten. Diese unsystematischen Ordnungen sind z. B. beim Basisverfahren schon darauf zurückzuführen, daß der Diskretisierungsfehler bei den späteren Intervallen von den IDeC-Schritten der vorherigen Intervalle abhängen, was bei der globalen Verbindungsstrategie nicht der Fall ist. Besonders schlecht ist die lokale Verbindungsstrategie in jenem Fall, falls die IDeC nicht funktioniert. Falls z. B. die IDeC-Schritte immer größere Fehler ergeben, wird durch die lokale Verbindungsstrategie die „schlechteste“ Näherung des vorherigen Intervalls als neuer Startwert für das nächste Intervall genommen. Dadurch wachsen die Fehler viel schneller an, wie bei der globalen Verbindungsstrategie.

LITERATUR

- [1] Reinhard Frank, Jörg Hertling und Herbert Lehner:
B-Convergence Properties of Defect Correction Methods Part I
Report Nr. 57/84, Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Technische Universität Wien
- [2] Reinhard Frank, Jörg Hertling und Hergert Lehner:
B-Convergence Properties of Defect Correction Methods Part II
Report Nr. 58/84, Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Technische Universität Wien
- [3] W. Liniger: A-Stable Averaging Algorithms
- [4] Franz Macsek:
Untersuchungen zur Implementierung der Defektkorrektur für Systeme Steifer
Differentialgleichungen, Diplomarbeit, ausgeführt am Institut für Numerische Ma-
thematik an der Technischen Universität Wien, Sept. 1977

Lebenslauf

Ich, Karl Eugen Fasching, wurde am 10. November 1959 in Groß-Sierning in Niederösterreich geboren. Im Jahr 1966 trat ich in die Volksschule in Haunoldstein ein. Ab dem Jahr 1970 besuchte ich die Hauptschule in Prinzersdorf. Im Jahr 1974 trat ich in die Handelsakademie in St. Pölten ein, wo ich 1979 die Matura ablegte. 1979 begann ich das Studium der Technischen Mathematik an der Technischen Universität Wien. Im Jahr 1980 begann ich an der Technischen Universität noch das Informatikstudium.